Zur differentialtopologischen und analytischen Klassifizierung gewisser algebraischer Mannigfaltigkeiten

von

Egbert Brieskorn

Als Manuskript vervielfältigt
im Mathematischen Institut
Bonn 1962

Einleitung

In der Arbeit "Some problems on differentiable and complex manifolds" hat F. Hirzebruch u.a. folgende Probleme zur Untersuchung vorgeschlagen:

Problem 25. Man bestimme alle komplexen Strukturen auf der zu der 2-dimensionalen Quadrik $P_1 \times P_1$ gehörigen differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

In [15] war gezeigt worden, daß es unendlich viele verschiedene komplexe Strukturen auf $P_1 \times P_1$ gibt, nämlich die Hirzebruchschen Σ_n -Flächen mit geradem n.

Problem 28. Man bestimme alle komplexen Strukturen auf der dem komplexen projektiven Raum P_n zugrunde liegenden differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

Problem 28* Man bestimme alle Kählerschen komplexen Strukturen auf P_n.

Problem 29. Gibt es eine zu P_{2m} diffeomorphe Kählersche Mannigfaltigkeit mit negativer erster Chernscher Klasse?

("Differenzierbar" bedeutet in dieser Arbeit stets "differenzierbar vom Typ C^∞" (alle partiellen Ableitungen existieren und sind stetig). Ein Diffeomorphismus $f : M \longrightarrow M'$ zweier Mannigfaltigkeiten ist eine injektive Abbildung, so daß f und f^{-1} differenzierbar sind.)

Während Problem 28 für $n > 1$ bis jetzt noch nicht gelöst ist, wurde 28* von Hirzebruch und Kodaira für ungerades n gelöst. ([19]): Es gibt nur die übliche Kählersche Struktur auf P_{2m+1}. Für gerades n erhielt man nur ein Teilresultat, weil Problem 29 bisher ungelöst ist.

Für Problem 25 erhielt Andreotti ein Teilresultat ([1]): Eine zu der 2-dimensionalen Quadrik $P_1 \times P_1$ diffeomorphe Kählersche Mannigfaltigkeit X ist eine Σ_{2m}-Fläche, falls noch eine gewisse Bedingung für die positiven Cohomologieklassen aus $H^2(X,Z)$ erfüllt ist.

Ferner sind in diesem Zusammenhang folgende Resultate von Kodaira zu erwähnen: Jede Kählersche Deformation eines projektiven Raumes P_n ist der projektive Raum P_n. Jede Deformation von P_2 ist P_2 ([27]). Die Frage, ob auch für $n > 2$ jede Deformation von P_n wieder P_n ist ([27] , Problem 8), ist ungelöst. Für die Σ-Flächen war bekannt: Jede Kählersche Deformation einer Σ-Fläche ist eine Σ-Fläche ([11]).

Die vorliegende Arbeit enthält Untersuchungen im Zusammenhang mit dem angedeuteten Problemkreis. Problem 28* wird statt für P_n für die singularitätenfreie komplexe projektive Quadrik Q_n untersucht. Es zeigt sich, daß für $n \neq 2$ die gleiche Situation wie bei den projektiven Räumen vorliegt - bezüglich der gelösten ebenso wie bezüglich der ungelösten Probleme - . Insbesondere wird also gezeigt (3.2.7): Jede zu Q_{2m+1} diffeomorphe Kählersche Mannigfaltigkeit ist biholomorph äquivalent zu Q_{2m+1}.
Dieser Satz wurde etwa gleichzeitig in meiner Diplomarbeit und unabhängig davon auf anderem Wege von A. van de Ven bewiesen (unveröffentlicht). Er wurde von van de Ven in [42] benutzt, um einen Satz über Kompaktierungen zu beweisen.
Wie bei den projektiven Räumen folgt aus (3.2.7): Jede Kählersche Deformation von Q_n, $n \neq 2$, ist wieder die singularitätenfreie Quadrik.

Für die zweidimensionale Quadrik hat man keine solchen Unizitätssätze, sondern stattdessen die oben erwähnten Resultate über Σ-Flächen. Die Σ-Flächen sind genau die holomorphen Faserbündel über P_1 mit Faser P_1. In dieser Arbeit wird gezeigt, daß sich viele Resultate über Σ-Flächen verallgemeinern lassen auf Σ-Mannigfaltigkeiten, d.h. holomorphe Faserbündel über P_1 mit Faser P_n.

Aus Grothendiecks Klassifizierung der holomorphen Vektorbündel über P_1 zusammen mit Sätzen von Remmert ergibt sich sofort die Klassifikation der Σ-Mannigfaltigkeiten als holomorphe Faserbündel: Jede Σ-Mannigfaltigkeit ist eine Mannigfaltigkeit $\Sigma_{a_1,\dots,a_n}$, wobei $\Sigma_{a_1,\dots,a_n}$ die in $P_1 \times P_{2n}$ bezüglich bihomogener Koordinaten $(y_0,y_1;x_0,\dots,x_{2n})$ durch die Gleichungen

$$y_0^{a_i}\, x_{2i-1} - y_1^{a_i}\, x_{2i} = 0 \qquad i=1,\dots,n$$

gegebene algebraische Mannigfaltigkeit ist $(0 \leqslant a_1 \leqslant \dots \leqslant a_n)$.

Die Σ-Mannigfaltigkeiten werden differentialtopologisch und analytisch vollständig klassifiziert (4.3.1): $\Sigma_{a_1,\dots,a_n}$ und $\Sigma_{b_1,\dots,b_n}$ sind biholomorph äquivalent, genau wenn $a_i = b_i$, $i = 1,\dots,n$. Sie sind diffeomorph, genau wenn $\sum a_i \pm \sum b_i \equiv 0(n+1)$.

Alle Σ-Mannigfaltigkeiten sind rational. Es läßt sich genau angeben, wie $\Sigma_{a_1,\dots,a_n}$ aus $P_1 \times P_n$ durch σ-Prozesse und inverse σ-Prozesse entsteht (4.3.3). Alle Σ-Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension sind also verwandte komplexe Räume im Sinn von [34]. Die einzigen komplexen Urräume davon (minimale Modelle) im Sinn von [34] sind die homogenen Räume $P_1 \times P_n$ (4.3.4). Die übrigen Σ-Mannigfaltigkeiten sind fast-homogen, aber nicht homogen, wie sich aus der Untersuchung ihrer Automorphismengruppen ergibt (4.1.10).

Der Versuch, das Andreottische Resultat auf Σ-Mannigfaltigkeiten zu übertragen, stößt auf Schwierigkeiten. Es gelang lediglich, eine ähnliche Aussage mit einer stärkeren

Voraussetzung zu beweisen (4.4.3), wobei ebensowenig wie im Fall der Σ-Flächen bzw. wie bei Problem 29 klar ist, ob diese Voraussetzung überflüssig ist.

Immerhin ist Satz 4.4.3 stark genug, um mit seiner Hilfe zu beweisen: Jede hinreichend kleine Deformation einer Σ-Mannigfaltigkeit ist eine Σ-Mannigfaltigkeit (4.5.1). Die Σ-Mannigfaltigkeiten lassen sich in Bezug auf c-Homotopie im Sinne von Kodaira vollständig klassifizieren (4.5.3): $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ und $\Sigma_{b_1,\ldots,b_n}$ sind ineinander deformierbar, genau wenn $\sum a_i - \sum b_i \equiv 0(n+1)$.

Es zeigt sich hier also eine Erscheinung, die bei den Σ-Flächen noch nicht auftritt: Ist n gerade und $\sum a_i + \sum b_i \equiv 0(n+1)$, $\sum a_i \not\equiv 0(n+1)$, so sind $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ und $\Sigma_{b_1,\ldots,b_n}$ zwar orientierungstreu diffeomorph, aber nicht ineinander deformierbar, denn sie haben wesentlich verschiedene Chernsche Klassen. - Ihre Chernschen Zahlen stimmen hingegen überein. -

Die komplexe Struktur von $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ ist lokal stabil bzgl. Deformationen, genau wenn $a_i \leq 1$ für $i=1,\ldots,n$. In den anderen Fällen lassen sich explizit "maximale" Deformationen angeben (4.5.4).

Die Beweismethoden kommen aus der algebraischen Geometrie und der komplexen Analysis sowie der algebraischen Topologie. Die letztgenannten Methoden wurden von F. Hirzebruch entwickelt ([17] , [18]). Sie liefern mit Hilfe des Satzes von Riemann-Roch hier Informationen über die Chernschen Klassen und über die Dimension von Divisoren auf algebraischen Mannigfaltigkeiten, die diffeomorph sind zu P_n bzw. Q_n bzw. $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$.

In Satz 2.2.3 wird unter Benutzung von Resultaten aus [2] eine Anwendung dieser Methoden auf gewisse homogene Räume gegeben.

Herrn Professor Hirzebruch möchte ich herzlich danken für sehr viele Anregungen und für die Förderung dieser Arbeit. Ebenso danke ich Herrn Professor Remmert sowie Herrn Professor van de Ven für die Anregungen, die ich während meines Aufenthaltes in Erlangen von ihnen erhalten habe.

Inhaltsverzeichnis

§ 1. Vorbereitungen

1.1. Algebraische Mannigfaltigkeiten und Kählersche Mannigfaltigkeiten

Dieser Paragraph dient lediglich der Festlegung einiger Begriffe und Bezeichnungen und der Zusammenstellung von einigen später benötigten bekannten Tatsachen.

D e f i n i t i o n e n : Eine algebraische Varietät ist ein irreduzibler komplexer Raum,[1] der einer analytischen Teilmenge eines komplexen projektiven Raumes P_n biholomorph äquivalent ist. Eine algebraische Mannigfaltigkeit ist eine singularitätenfreie algebraische Varietät. Eine Kählersche Metrik auf einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X ist eine positiv definite Hermitesche Metrik $g : \tau \oplus \tau \to C$ des komplexen kontravarianten Tangentialbündels τ von X, für welche die durch $\omega(v,w) :=$ Imaginärteil $(g(v,w))$ definierte reelle C^{∞}-Differentialform geschlossen ist; die zu ω gehörige Cohomologieklasse aus $H^2(X,R)$ heißt Fundamentalklasse der Kählerschen Metrik. Eine Cohomologieklasse aus $H^2(X,Z)$ heißt positiv, wenn sie bei dem Koeffizientenhomomorphismus $H^2(X,Z) \longrightarrow H^2(X,R)$ in die Fundamentalklasse einer Kählerschen Metrik übergeht. Ein holomorphes Geradenbündel ξ heißt positiv, wenn seine erste Chernsche Klasse $c_1(\xi)$ positiv ist. Eine Kählersche Mannigfaltigkeit ist eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, auf der es eine Kählersche Metrik gibt. Eine Hodge-Mannigfaltigkeit ist eine Kählersche Mannigfaltigkeit X, für die es eine positive Cohomologieklasse in $H^2(X,Z)$ gibt.

Es sei X_n eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit [1'], $T^{(k)}$ das k-fache alternierende Produkt des kovarianten komplexen Tangentialbündels. Für die erste Chernsche Klasse $c_1(X)$ von X gilt $c_1(X) = - c_1(T^{(n)})$. Für ein holomorphes Vektorbündel η bezeichne $H^q(X,\eta)$ die q-te Cohomologiegruppe mit Koeffizienten in der Garbe der Keime von holomorphen Schnitten in η.

$H^q(X,\eta)$ ist ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum mit Dimension 0 für $q>n$. Es sei $h^{p,q}(X) := \dim_{\mathbb{C}} H^q(X, T^{(p)})$ 2)
Es gilt (zu 1.1.1 vgl. [39]; zu 1.1.2 etwa [18], § 15; zu 1.1.3 [25] Theorem 3):

Satz 1.1.1. (Serre-Dualität)

$$H^q(X_n, \xi \otimes T^{(p)}) = H^{n-q}(X_n, \xi^* \otimes T^{(n-p)})$$

(dabei bezeichnet ξ^* das duale Bündel zu ξ).

Satz 1.1.2.
Für eine Kählersche Mannigfaltigkeit X_n mit m-ter Bettizahl b_m gilt:

i) $b_m = \sum\limits_{p+q=m} h^{p,q}$

ii) $h^{p,q} = h^{q,p}$

iii) $h^{i,i} \geqslant 1$

Satz 1.1.3.
Ist für ein holomorphes Geradenbündel ξ über einer Hodge-Mannigfaltigkeit X_n mit dem kanonischen Geradenbündel $K := T^{(n)}$ $\xi \otimes K^{-1}$ positiv, so gilt

$H^q(X, \xi) = 0$ für $q > 0$.

Kodaira hat folgende Charakterisierung der algebraischen Mannigfaltigkeiten gefunden (zu 1.1.4 vgl. [26], zu 1.1.5 [29]):

Satz 1.1.4.
Eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit ist algebraisch, genau wenn sie eine Hodge-Mannigfaltigkeit ist.

Hieraus folgt:

Satz 1.1.5.
Eine Kählersche Mannigfaltigkeit mit $h^{0,2} = 0$ ist algebraisch.

1.2. Cohomologiering und Chow-Ring algebraischer Mannigfaltigkeiten

Es sei V_n eine algebraische Mannigfaltigkeit. Ein algebraischer Zykel ist eine endliche formale Summe algebraischer Untervarietäten. Zu zwei Untervarietäten V_a, V_b mit rein $(a+b-n)$-dimensionalem Durchschnitt ist der Schnittzykel $V_a \circ V_b$ definiert. Damit wird die Menge der rationalen Restklassen algebraischer Zykeln zu einem Ring, dem Chow-Ring (vgl. [7]).
Folgende Tatsachen sind wohl bekannt (zu 1.2.1 vgl. in [4] die Sätze 4.15, 1.11, 1.12, zu 1.2.2 vgl. [4] 3.4 zusammen mit [31]):

Satz 1.2.1.
Es gibt einen Homomorphismus des Chow-Ringes in den ganzzahligen Cohomologiering im Sinn von Grothendieck [7] 4 - 16.
Man kann also jedem a-dimensionalen algebraischen Zykel Z_a einer algebraischen Mannigfaltigkeit V_n eine "duale" Cohomologieklasse $c(Z_a) \in H^{2(n-a)}(V_n, Z)$ zuordnen, derart daß, wenn für zwei Zykeln Z_a, Z_b $Z_a \circ Z_b$ definiert ist, gilt

$$c(Z_a \circ Z_b) = c(Z_a) \cup c(Z_b)$$

Sind die Komponenten von Z_a singularitätenfrei, so ist $c(Z_a)$ vermöge Poincaré-Dualität dual zu der durch Z_a definierten Homologieklasse.

Satz 1.2.2.
V_n sei eine algebraische Mannigfaltigkeit, X_p eine algebraische Untervarietät mit der dualen Cohomologieklasse $c(X_p)$ und $g \in H^2(V, Z)$ positiv. Dann gilt:

$$g^p \cup c(X_p)\ [V] > 0 \qquad 3)$$

Wenn eine algebraische Mannigfaltigkeit V eine geeignete Zellenzerlegung besitzt, läßt sich dadurch der Cohomologiering berechnen (zum Folgenden vgl. [4] 6.4).

D e f i n i t i o n : Eine algebraische Zellenzerlegung von V ist eine disjunkte Zerlegung von V in endlich viele geradedimensionale Zellen $X^{(i)}$, so daß gilt:

i) $X^{(i)}$ ist offen in seiner abgeschlossenen Hülle $\overline{X}^{(i)}$

ii) $\overline{X}^{(i)} - X^{(i)}$ ist Vereinigung endlich vieler $X^{(j)}$ niedrigerer Dimension

iii) Die abgeschlossene Hülle $\overline{X}^{(i)}$ von $X^{(i)}$ in V ist eine algebraische Untervarietät von V.

Satz 1.2.3.

Für eine algebraische Mannigfaltigkeit V mit einer algebraischen Zellenzerlegung $X^{(i)}$ ist $H^*(V,Z)$ eine freie abelsche Gruppe, die von den zu $\overline{X}^{(i)}$ gehörigen dualen Cohomologieklassen $c(\overline{X}^{(i)})$ erzeugt wird.

1.3. Divisoren und holomorphe Geradenbündel

Ein Divisor auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit V_n ist ein (n-1)-dimensionaler algebraischer Zykel auf V_n. G sei die abelsche Gruppe aller Divisoren auf V, G_r die Untergruppe der rational nulläquivalenten Divisoren, d.h. der Hauptdivisoren.

Für eine beliebige komplexe Mannigfaltigkeit X lassen sich Divisoren folgendermaßen definieren: Sei C^*_ω bzw. $\mathcal{G}$ die Garbe der Keime lokaler nichtverschwindender holomorpher bzw. meromorpher Funktionen. [4] Die Divisoren von X sind die Elemente der additiven Gruppe $H^0(X, \mathcal{G}/C^*_\omega)$

Für eine algebraische Mannigfaltigkeit X ist jedem $D \in G$ vermöge der die Komponenten von D definierenden lokalen holomorphen Funktionen ein Divisor aus $H^0(X, \mathcal{G}/C^*_\omega)$ zugeordnet. Ferner veranlaßt die exakte Sequenz

$$0 \to C^*_\omega \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}/C^*_\omega \to 0$$

eine exakte Cohomologiesequenz

$$\dots \longrightarrow H^0(X,\mathcal{M}) \xrightarrow{p} H^0(X,\mathcal{M}/C^*_\omega) \xrightarrow{\delta^0} H^1(X,C^*_\omega) \longrightarrow \dots$$

Durch δ^0 ist jedem Divisor D ein komplex-analytisches C^*-Bündel $[D] := \delta^0(D)^{-1}$ zugeordnet, und damit auch eine Isomorphieklasse holomorpher Geradenbündel $\{D\}$, da $H^1(X,C^*_\omega)$ die holomorphen Geradenbündel klassifiziert (vgl. [18] 3.2.1, 3.2.b). Dabei entspricht die Multiplikation in $H^1(X,C^*_\omega)$ dem Tensorprodukt von Geradenbündeln.

Satz 1.3.1.

X sei eine algebraische Mannigfaltigkeit, $\mathcal{O}_X$ die Garbe der holomorphen Funktionskeime

i) Es gibt natürliche Gruppenisomorphismen

$$G/G_r \xrightarrow{g} H^0(X,\mathcal{M}/C^*_\omega)\,/\,pH^0(X,\mathcal{M}) \xrightarrow{h} H^1(X,C^*_\omega)$$

ii) Ist D ein Divisor, $c(D)$ seine Cohomologieklasse, $c_1(\{D\})$ die erste Chernsche Klasse von $\{D\}$, δ^1 der verbindende Homomorphismus in der exakten Cohomologiesequenz [5])

$$\dots \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X,C^*_\omega) \xrightarrow{\delta^1} H^2(X,Z) \longrightarrow H^2(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow \dots ,$$

so gilt

$$c(D) = c_1(\{D\}) = \delta^1 [D]$$

Zum Beweis: Die Isomorphismen sind durch die oben angegebenen Zuordnungen definiert. Die Injektivität von g und h ist trivial. Zur Surjektivität von h vgl. [24] p.874. Zur Surjektivität von g vgl. [40] prop.18 und [43] p.26. $c(D) = c_1(\{D\})$ wird in [4] 4.13 bewiesen, $c_1(\{D\}) = \delta^1 [D]$ in [18] 4.3.1.

Bemerkung: Insbesondere ist also nach 1.3.1 ii) und 1.1.2

$H^1(X,C^*_\omega) \longrightarrow H^2(X,Z)$ injektiv für $b_1 = 0$ und surjektiv für $b_2 \leqslant 2$.

(b_i = i - te Bettische Zahl von X)

§ 2. Abhängigkeit gewisser Invarianten der komplexen Struktur vom Diffeomorphietyp

2.1. T- und χ-Charakteristik und erste Chernsche Klasse

Es seien $c_1, c_2, \ldots$ Unbestimmte, Q die rationalen Zahlen, $c_0 = 1$. Im Polynomring $Q[c_1, c_2, \ldots]$ werde $c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k}$ das Gewicht $i_1 + \ldots + i_k$ zugeordnet. Es existiert eine eindeutig bestimmte Folge von Polynomen $T_j(c_1, \ldots, c_j)$ $(j = 0, 1, \ldots;\ T_0 = 1)$ vom Gewicht j mit folgenden Eigenschaften (vgl. hierzu [18] § 1):

i) Es seien x, c_i, c_i' für $i \geq 1$ Unbestimmte, $c_0 = c_0' = c_0'' = 1$.
Aus der formalen Gleichung

$$\Big(\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} c_j' x^j\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k'' x^k \quad \text{folgt}$$

$$\Big(\sum_{i=0}^{\infty} T_i(c_1, \ldots, c_i) x^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} T_j(c_1', \ldots, c_j') x^j\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(c_1'', \ldots, c_k'') x^k$$

ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} T_i(1, 0, \ldots, 0) x^i = x(1 - e^{-x})^{-1}$

Es sei X_n eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit mit den Chernschen Klassen $c_1, \ldots, c_n$ und den Pontrjaginschen Klassen p_i, ferner ξ ein stetiges komplexes Geradenbündel über X mit erster Chernsche Klasse $c_1(\xi)$

$$T(X, \xi) := \Big(e^{c_1(\xi)} \sum_{i=0}^{\infty} T_i(c_1, \ldots, c_i)\Big)[X]$$

heißt <u>Todd-Charakteristik</u> von ξ.

Aus Resultaten von Hirzebruch und Milnor ergibt sich (vgl. [20] p.130)

<u>Satz 2.1.1.</u>

$T(X, \xi)$ ist eine ganze Zahl.

Lemma 2.1.2.

$$T(X,\xi) = \left(e^{c_1(\xi)+\frac{c_1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \hat{A}_i(p_1,\ldots,p_i)\right) [X_n]$$

Dabei sind die $\hat{A}_i(p_1,\ldots,p_i)$ gewisse Polynome in den Pontrjaginschen Klassen, $\hat{A}_0 = 1$ (vgl. [18] 1.3.(7), 1.6.(12), 4.5.1)

Die in dieser Formel auftretenden Pontrjaginschen Klassen sind Invarianten des Diffeomorphietyps. Als Invariante der komplexen Struktur von X tritt nur c_1 auf. 2.1.2 wird zusammen mit dem folgenden Lemma 2.1.3. und dem Satz von Riemann-Roch-Hirzebruch eine Aussage darüber ermöglichen, in welchem Maße für zwei algebraische Mannigfaltigkeiten mit dem gleichen Diffeomorphietyp die erste Chernsche Klasse der einen Mannigfaltigkeit bereits durch den Diffeomorphietyp und die erste Chernsche Klasse der anderen Mannigfaltigkeit festgelegt ist (siehe 2.1.6).

Folgende Tatsache ist wohlbekannt (vgl. [41]41.8)

Lemma 2.1.3.

ξ sei ein stetiges $U(n)$-Bündel über einem Raum X, für den der Bündel-Klassifikationssatz gilt, $c(\xi)$ seine totale Chernsche Klasse und $w(\xi)$ die totale Stiefel-Whitneysche Klasse des zugehörigen $GL(2n,R)$-Bündels, λ der Koeffizientenhomomorphismus $H^*(X,Z) \longrightarrow H^*(X,Z_2)$.
Dann gilt: $$\lambda\,(c(\xi)) = w(\xi)\ .$$

Insbesondere geht also die Chernsche Klasse einer komplexen Mannigfaltigkeit bei Reduktion modulo 2 in die Stiefel-Whitneysche Klasse über, die eine topologische Invariante ist.

Die Todd-Charakteristik ist eine Funktion mit ganzzahligen Werten auf der Gruppe $H^1(X,C^*_c)$ der Isomorphieklassen stetiger komplexer Geradenbündel. Wegen $H^1(X,C^*_c) \cong H^2(X,Z)$ kann sie auch als Funktion auf $H^2(X,Z)$ aufgefaßt werden. In diesem Sinn ist das folgenden Lemma zu verstehen:

Lemma 2.1.4.

X, X' seien kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten mit den ersten Chernschen Klassen c_1, c_1', $i : X' \longrightarrow X$ ein Difeomorphismus mit $i_*[X'] = \sigma [X]$ $(\sigma = \pm 1)$.
Dann gilt für $a \in H^2(X,Z)$

$$T(X,a) = \sigma\, T(X', i^*a + \tfrac{1}{2}(i^*c_1 - c_1'))$$

Beweis: Es seien p_j bzw. p_j' die Pontrjaginschen Klassen von X bzw. X'. Nach 2.1.3 gilt $\lambda c_1' = i^* \lambda c_1 = \lambda i^* c_1$, d.h. $i^*c_1 - c_1'$ ist durch 2 teilbar und die obige Formel also sinnvoll. Nach 2.1.2 gilt, da $i^*p_j = p_j'$,

$$T(X,a) = \left(e^{a+\frac{c_1}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(p_1,\ldots,p_j) \right) [X] =$$
$$\sigma \left(e^{i^*a + \frac{1}{2}(i^*c_1 - c_1') + \frac{c_1'}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(p_1',\ldots,p_j') \right) [X']$$
$$\sigma\, T(X', i^*a + \tfrac{1}{2}(i^*c_1 - c_1'))$$

Bemerkung: Ist $H^2(X_n,Z)$ ohne Torsion, so läßt sich bzgl. irgendeiner Basisdarstellung $H^2(X,Z) \cong Ze_1 + \ldots + Ze_k$ die Todd-Charakteristik in der folgenden Form darstellen:

$$T(X_n; x_1e_1 + \ldots + x_ke_k) = \sum_{j_1+\ldots+j_k \leq n} a_{j_1\ldots j_k} \binom{x_1}{j_1} \cdots \binom{x_k}{j_k}$$

Dies ist eine triviale Folgerung aus 2.1.1 und einem bekannten Satz über Polynome, die für ganzzahlige Argumente ganzzahlige Werte annehmen.

Für algebraische Mannigfaltigkeiten kann man die obigen Resultate auf die χ-Charakteristik übertragen.
Für eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit X und ein holomorphes Geradenbündel $\mathfrak{g}$ über X ist die
Euler-Poincarésche Charakteristik durch

$$\chi(X,\mathfrak{g}) := \sum (-1)^i \dim_C H^i(X,\mathfrak{g})$$

definiert. Speziell heißt

$\chi(X) := \sum (-1)^i h^{o,i}$ arithmetisches Geschlecht.

Satz 2.1.5. Riemann-Roch-Hirzebruch

Für ein holomorphes Geradenbündel $\mathfrak{g}$ über einer algebraischen Mannigfaltigkeit X gilt

$$\chi(X,\mathfrak{g}) = T(X,\mathfrak{g})$$

Siehe [18] 20.3.2.

Ist X' eine algebraische Mannigfaltigkeit mit $h^{o,2} = 0$, so ist $H^1(X',C^*_\omega) \longrightarrow H^2(X',Z)$ surjektiv (vgl. 1.3.1 ii)) und die χ-Charakteristik kann wegen 2.1.5 als Funktion auf $H^2(X',Z)$ aufgefaßt werden. Bei dieser Interpretation ergibt 2.1.4

Satz 2.1.6.
Es seien X,X' algebraische Mannigfaltigkeiten mit den ersten Chernschen Klassen c_1 bzw. c_1'. Es sei $h^{0,2}(X')=0$
Ferner sei $i : X' \longrightarrow X$ ein Diffeomorphismus mit
$i_*[X'] = \sigma[X]$. Dann gilt für
$a \in \text{Bild } (H^1(X,C^*_\omega) \longrightarrow H^2(X,Z))$

$$\chi(X,a) = \sigma\, \chi(X', i^*a + \frac{1}{2}(i^*c_1 - c_1'))\ .$$

Insbesondere

$$\chi(X) = \sigma\, \chi(X', \frac{1}{2}(i^*c_1 - c_1'))\ .$$

2.1.6 ergibt eine wichtige Methode zum Beweis des Hauptsatzes in 3.2. Man kann nach 1.1.2 $\chi(X)$ durch die Bettizahlen von X' nach oben und unten abschätzen; z.B. ist $\chi(X) = 1$, falls die ungerade-dimensionalen Bettizahlen verschwinden und die gerade-dimensionalen ≤ 2 sind. Damit ergibt sich aus der Kenntnis der χ- Charakteristik und der ersten Chernschen Klasse von X' eine Einschränkung für die Werte, die i^*c_1 möglicherweise annehmen kann (siehe z.B. 2.1.7). Dies wird später für gewisse spezielle Mannigfaltigkeiten im einzelnen ausgeführt (§ 2.2, § 3.1, § 4.4), wobei sich herausstellen wird, daß u.U. c_1 und damit auch die χ-Charakteristik von X durch den orientierten Diffeomorphietyp und die erste Chernsche Klasse von X' völlig festgelegt sind.

Korollar 2.1.7.

Es sei X_n eine Kählersche Mannigfaltigkeit mit $H^2(X,Z) \cong Z$. Dann gibt es endlich viele Cohomologieklassen $a_1,\ldots,a_r \in H^2(X,Z)$, so daß gilt: Ist X' eine Kählersche Mannigfaltigkeit und $i: X \longrightarrow X'$ ein Diffeomorphismus, so folgt für die erste Chernsche Klasse c_1' von X'.

$$i^*(c_1') \in \{a_1,\ldots,a_r\} .$$

Ist der genaue Wert von $\chi(X')$ festgelegt, so gilt $r \leq n$.

Beweis: X und X' sind nach 1.1.2 und 1.1.5 algebraisch, 2.1.7 ergibt sich dann aus den Bemerkungen im Anschluß an 2.1.4 und 2.1.6.

Bemerkung: Unter der stärkeren Voraussetzung, daß X' eine Deformation von X im Sinn von Kodaira-Spencer ist, lassen sich die mit den Methoden dieses Paragraphen zu gewinnenden Ergebnisse u.U. verschärfen (siehe z.B. § 3.2, § 4.5).

2.2. Anwendung auf gewisse homogene Räume

G sei eine kompakte zusammenhängende halbeinfache Liesche Gruppe, r der Rang von G, U der Zentralisator eines eindimensionalen Torus S. Das Zentrum von U sei eindimensional.

Im folgenden werden die homogenen Räume G/U mit der in § 2.1 entwickelten Fragestellung untersucht. Diese Klasse von Räumen umfaßt insbesondere die sechs Klassen von kompakten irreduziblen hermiteschen symmetrischen Räumen. Vgl. [2] § 16. Es werden zunächst ohne Beweise einige später benötigte Tatsachen über die homogenen Räume G/U zusammengestellt:

i) G/U hat keine Torsion. Die ungerade-dimensionalen Bettizahlen verschwinden.

ii) Bezüglich irgendeiner Ordnung im Sinn von [2] 2.4 hat G r einfache Wurzeln $a_1,\ldots,a_r$. Sie sind linear unabhängig.

iii) Nach [2] 13.6 ist bei geeigneter Wahl eines maximalen Torus von G bzgl. einer geeigneten Ordnung mit den einfachen Wurzeln $a_1,\ldots,a_r$ $S \subset T$ und S durch $a_1 = \ldots = a_{r-1} = 0$ definiert. Die Wurzeln von U sind die Wurzeln, die sich ganzzahlig aus $a_1,\ldots,a_{r-1}$ kombinieren lassen. Das System der positiven komplementären Wurzeln ist das Wurzelsystem einer invarianten komplexen Struktur auf G/U. Es ist $H^2(G/U,Z) \cong Z$. Für das positive erzeugende Element g bezüglich dieser komplexen Struktur gilt (siehe [2] 14.2) $\nu^*(g) = \tilde{\omega}_r$ (wo $\nu: G/T \longrightarrow G/U$ die Projektion bezeichnet und wo $\tilde{\omega}_r$ das r-te Fundamentalgewicht ist, das nach [2] 10.1 vermöge Transgression als Element von $H^2(G/T,Z)$ aufgefaßt ist). Die Elemente von $H^2(G/U,Z)$ lassen sich als Gewichte auffassen, die orthogonal zu den Wurzeln von U sind.

iv) G/U hat genau zwei invariante komplexe Strukturen (siehe [2] 13.8). Es sind dies algebraische Strukturen, wie aus [2] 24.10 hervorgeht. Diese sind äquivalent unter einem durch einen Automorphismus von G induzierten Diffeomorphismus. Aus den Bemerkungen iii) und dem Beweis in [2] 13.8 ergibt sich, daß dieser Diffeomorphismus das erzeugende Element $g \in H^2(G/U,Z)$ in $-g$ überführt und daß g bzw. $-g$ die positiven erzeugenden Elemente der beiden invarianten komplexen Strukturen sind.

v) Es sei $\pi : \overline{G} \longrightarrow G$ die einfach zusammenhängende universelle Überlagerung von G. Nach einem Satz von H. Weyl ist die halbeinfache Gruppe $\overline{G}$ kompakt. Vermöge $d\pi$ sind die Liealgebren von $\overline{G}$ und G, $\overline{\mathfrak{g}}$ bzw. $\mathfrak{g}$ zu identifizieren. Ist in $\mathfrak{g}$ eine invariante Metrik eingeführt, so damit auch in $\overline{\mathfrak{g}}$. Ferner sind bei geeigneter Wahl der maximalen Tori $\overline{T}$ bzw. T deren Tangentialräume $V_{\overline{T}}$ bzw. V_T zu identifizieren und ebenso die dualen Räume $V^*_{\overline{T}}$ bzw. V^*_T (einschließlich Metrik) durch die transponierte Abbildung $d\pi^* : V^*_T \longrightarrow V^*_{\overline{T}}$. Die Gewichte von G sind so als Gewichte von $\overline{G}$ aufzufassen. Speziell gehen die Wurzeln a_i von G dabei in Wurzeln $d\pi^* a_i$ von $\overline{G}$ über.

vi) Die Weylsche Gruppe $W(G)$ von G läßt sich als die Gruppe auffassen, die von den Spiegelungen S_{a_i} an den zu den Wurzeln a_i gehörigen Ebenen $a_i = 0$ erzeugt wird. Sie operiert auf den Gewichten von G. (Siehe [2] 1.4). Für ein Gewicht $b \in V^*_T$ und eine Wurzel a gilt

$$S_{d\pi^* a}\, d\pi^* b = d\pi^* S_a\, b .$$

D.h. $W(G)$ operiert auf den als Gewichten von $\overline{G}$ aufgefaßten Gewichten von G wie $W(\overline{G})$, und dies Operieren ist mit dem üblichen verträglich.

Durch Spezialisierung eines in [2] § 24.7 bewiesenen Satzes erhält man:

Lemma 2.2.1.

G/U sei wie in iii) mit einer invarianten komplexen Struktur versehen, $d \in H^2(G/U,Z)$ sei positiv, $\mathfrak{g}$ ein analytisches Geradenbündel mit $c_1(\mathfrak{g}) = d$, Γ die bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmte irreduzible Darstellung von $\bar{G}$ mit dem Hauptgewicht $d\pi^*(d)$ (bezüglich der in iii) benutzten Ordnung). Dann gilt

$$\chi(G/U,\mathfrak{g}) = \operatorname{grad} \Gamma$$

Lemma 2.2.2.

Die Bezeichnungen seien wie in 2.2.1. Ferner bezeichne $E(G/U)$ die Eulersche Charakteristik von G/U. Es gilt

$$E(G/U) \leqslant \chi(G/U,\mathfrak{g})$$

Beweis:[6] Die Elemente von $W(\bar{G})$ und damit nach vi) auch die von $W(G)$ vertauschen die Gewichte der Darstellung. Es wird behauptet, daß d genau durch die Elemente von $W(U)$ in sich überführt wird. Daß $W(U)$ d fest läßt, ist trivial, denn es ist für eine Wurzel a_i von U $(a_i,d) = 0$ und

$$S_{a_i} d = d - 2(a_i,d)(a_i,a_i)^{-1} \cdot a_i \qquad \text{(vgl. [2] 1.4)}$$

Umgekehrt: $W(G)$ läßt sich als die Gruppe der inneren Automorphismen auffassen, die den maximalen Torus T invariant lassen. Möge $\gamma \in W(G)$ dem zu $a \in G$ gehörigen inneren Automorphismus $\sigma(a)$ entsprechen, und sei $\gamma d = d$. Es ist zu zeigen, daß $a \in U$. Es sei ϑ der dem Gewicht d bei dem kanonischen Isomorphismus $V_T^* \cong V_T$ entsprechende Vektor. $\gamma d = d$ ist äquivalent zu $Ad(a)\vartheta = \vartheta$. (Ad bezeichne die adjungierte Darstellung von G). Daß d senkrecht zu den Wurzeln von U ist, besagt, daß ϑ in den Ebenen $a_1 = 0,\dots,a_{r-1} = 0$ liegt. Die Beschränkung von $Ad(a)$ auf den durch $a_1 = \dots = a_{r-1} = 0$ gegebenen Tangentialraum von S ist also die Identität. Wegen der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} V_T & \xrightarrow{Ad(a)} & V_T \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ T & \xrightarrow[\sigma(a)]{} & T \end{array}$$

Ist dann auch $\sigma(a)|S$ die Identität, d.h. für alle $s \in S$ $asa^{-1} = s$, also $a \in U$ = Zentralisator von S, wie behauptet wurde.

Für $\gamma, \gamma' \in W(G)$ mit $\gamma d = \gamma' d$ gilt also $\gamma \gamma'^{-1} \in W(U)$, d.h. $\gamma \in W(U) \cdot \gamma'$. d wird durch $W(G)$ also mindestens in soviel untereinander verschiedene Gewichte der Darstellung mit Hauptgewicht d überführt, wie es Nebenklassen von $W(G)$ nach $W(U)$ gibt, also

$$\frac{\text{ord } W(G)}{\text{ord } W(U)} \leqslant \text{grad } \Gamma \qquad (*)$$

Nun ist aber nach einem klassischen Resultat (siehe z.B. [2] 24.3)

$$E(G/U) = \frac{\text{ord } W(G)}{\text{ord } W(U)} \qquad (**)$$

Aus (*) und (**) zusammen mit Lemma 2.2.1 ergibt sich unmittelbar

$$E(G/U) \leqslant \chi(G/U, \mathfrak{g})$$

Satz 2.2.3.

Die Kählersche Mannigfaltigkeit X sei diffeomorph zu G/U (mit invarianter komplexer Struktur). $g \in H^2(X,Z)$ bzw. $g' \in H^2(G/U,Z)$ seien die positiven erzeugenden Elemente, $c_1(G/U) = \mu g'$ die erste Chernsche Klasse. Dann ist X eine algebraische Mannigfaltigkeit und es gilt

$c_1(X) = \mu g$ für $\dim_C G/U$ ungerade
$c_1(X) = \pm \mu g$ für $\dim_C G/U$ gerade .

Im Fall $c_1(X) = +\mu g$ gilt

$$\chi(X, k \cdot g) = \chi(G/U, k \cdot g') \qquad k \in Z$$

Beweis: Zunächst kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es einen orientierungstreuen Diffeomorphismus $i: G/U \longrightarrow X$ gibt. Denn ein Diffeomorphismus zweier Kählermannigfaltigkeiten X_n, X'_n mit $H^2(X,Z) \cong Z$ ist genau dann orientierungstreu, wenn entweder n gerade ist, oder wenn der Diffeomorphismus die positiven Klassen ineinander überführt. (Beweis: $i_* [X'] = \sigma[X]$. Nach 1.2.2 $0 < g^n[X] = \sigma(i^*g)^n[X']$; für gerades n ist $(i^*g)^n[X'] > 0$, also $\sigma > 0$. Für ungerades n und $i^*g \doteq \pm g'$ folgt die Behauptung aus $\pm\sigma\, g'^n[X'] > 0$). Daraus ergibt sich zusammen mit iv) die Behauptung.
Wegen i), 1.1.2 gilt $1 \leqslant \chi(X) < E(G/U)$, also wegen Lemma 2.2.2 $1 \leqslant \chi(X) < \chi(G/U, d\cdot g')$ für $d \in Z, d > 0$. Daraus ergibt sich nach 2.1.6 zusammen mit 1.1.1 und 1.1.3 $\chi(X) = 1$. $\chi(G/U, d\cdot g') = 1$ impliziert für ungerades n $d = 0$, also $i^*c_1(X) = c_1(G/U)$, für gerades n $d=0$ oder $d=-\mu$ und also $i^*c_1(X) = \pm c_1(G/U)$ und damit die Aussage i).
ii) ist eine triviale Folge von 2.1.6.

Da die kompakten irreduziblen hermiteschen symmetrischen Räume

$P_n = U(n+1)/U(1) \times U(n)$ und

$Q_n = SO(n+2)/SO(2) \times SO(n)$ $\qquad n > 2$

der beim Beweis von 2.2.3 zugrunde gelegten Klasse von Räumen angehören, gilt:

<u>Korollar 2.2.4.</u>
Satz 2.2.3 gilt für die komplexen projektiven Räume P_n (n beliebig) und die komplexen projektiven Quadriken Q_n ($n > 2$).

Bemerkung: Für P_n und Q_n gibt es einfachere Beweise als den vorstehenden, siehe [17] 3.2.

§ 3. Ein Unizitätssatz für die komplexe Struktur der Quadrik

3.1. Cohomologiering und χ-Charakteristik der Quadrik

Ch. Ehresmann hat in [8] IV.14 eine algebraische Zellenzerlegung der Quadrik angegeben, mittels derer der Cohomologiering berechnet werden kann. Das Resultat ist:

Satz 3.1.1.

Für den Cohomologiering $H^*(Q_n,Z)$ einer singularitätenfreien Quadrik Q_n $(n>2)$ kann eine Basis gewählt werden, so daß gilt:

i) Für $n = 2m+1$

$$H^*(Q_n,Z) = Ze_0 + \dots + Ze_n \qquad e_i \in H^{2i}(Q,Z)$$

Für $n = 2m$

$$H^*(Q_n,Z) = Ze_0 + \dots + Ze_m + Ze'_m + \dots + Ze_n$$
$$e_i, e'_i \in H^{2i}(Q,Z)$$

Die e_i sind die dualen Cohomologieklassen gewisser algebraischer Untervarietäten, $e_1 =: g$ ist positiv.

ii) $e_i \cup e_{n-i} = e_n$ für $n=2m+1$ bzw. $n=2m$ und $i \neq m$

iii) Für $n = 2m$ gilt

$$e_m \cup e_m = e'_m \cup e'_m = \begin{cases} e_n & m \text{ gerade} \\ 0 & m \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$e_m \cup e'_m = \begin{cases} 0 & m \text{ gerade} \\ e_n & m \text{ ungerade} \end{cases}$$

iv) Es gilt

$$\text{für } n = 2m+1 \quad g^r = \begin{cases} e_r & r \leqslant m \\ 2e_r & r > m \end{cases}$$

$$\text{für } n = 2m \quad g^r = \begin{cases} e_r & r < m \\ e_m + e'_m & r = m \\ 2e_r & r > m \end{cases}$$

Die totale Chernsche Klasse $c(Q_n)$ der Quadrik kann leicht aus der totalen Chernschen Klasse des (n+1)-dimensionalen projektiven Raumes $c(P_{n+1}) = (1+g)^{n+2}$ mittels der Adjunction-Formel berechnet werden:

$$c(Q_n)(1+2g) = (1+g)^{n+2}$$

Also speziell $c_1(Q_n) = ng$

Hieraus kann man unter Anwendung des Satzes von Riemann-Roch die χ-Charakteristik berechnen (vgl. [17] 2.1)

Das Resultat ist:

<u>Satz 3.1.2.</u>

Es sei g das positive erzeugende Element von $H^2(Q_n, Z)$, $\mathfrak{g}$ ein holomorphes Geradenbündel mit $c_1(\mathfrak{g}) = g$.

$$\chi(Q_n, \mathfrak{g}^k) = \binom{n+1+k}{n+1} - \binom{n+k-1}{n+1}$$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Anzahl der linear unabhängigen homogenen Polynome vom Grade s in m+1 Variablen $\binom{m+s}{m}$ ist, folgt aus 3.1.2 in trivialer Weise:

<u>Korollar 3.1.3.</u>

$\rho_k(V_n)$ bezeichne die k-Postulation einer Hyperfläche $V_n \subset P_{n+1}$, d.h. die Anzahl linear unabhängiger homogener Polynome k-ten Grades in n+2 Variablen, die auf V_n nicht identisch verschwinden. Es gilt bzgl. der Standardeinbettung $Q_n \subset P_{n+1}$

$$\chi(Q_n, \mathfrak{g}^k) = \rho_k(Q_n)$$

Bemerkung: 3.1.3 gilt für alle singularitätenfreien Hyperflächen V_n, $n > 2$. (Das ergibt sich sofort aus der Rechnung in [17] 2.1).

3.2. Beweis des Hauptsatzes

Es ist aus der algebraischen Geometrie bekannt, wie man einem Linearsystem auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit X eine rationale Abbildung in einen projektiven Raum zuordnet. In diesem Zusammenhang hat Kodaira beim Beweis von 1.1.4 eine wichtige Charakterisierung der positiven Geradenbündel angegeben, die im folgenden benutzt wird (vgl. hierzu [26]).

Es sei $\mathfrak{g}$ ein holomorphes Geradenbündel über der Hodge-Mannigfaltigkeit X , $\Gamma(\mathfrak{g}) \cong H^0(X,\mathfrak{g})$ der komplexe Vektorraum der globalen holomorphen Schnitte in $\mathfrak{g}$. Für $0 \neq s \in \Gamma(\mathfrak{g})$ ist das Nullstellengebilde von s ein effektiver Divisor D (ein Divisor heißt effektiv, wenn die Koeffizienten seiner Komponenten alle nicht-negativ sind). Es ist $\mathfrak{g} \cong \{D\}$ also $c(D) = c_1(\mathfrak{g})$ (vgl. 1.3.1) . Der zu $\Gamma(\mathfrak{g})$ gehörige projektive Raum ist kanonisch isomorph zur Vollschar $|D|$.
$B := \bigcap_{D' \in |D|} D'$ heißt die Basis von $\mathfrak{g}$.

Man wähle eine Vektorraumbasis $\varphi_0,\ldots,\varphi_m \in \Gamma(\mathfrak{g})$. Sie wird bzgl. Bündelkoordinatenumgebungen $\{U_i\}$ durch (m+1)-Tupel holomorpher Funktionen $(\varphi_{0,i}(z),\ldots,\varphi_{m,i}(z))$ dargestellt. Ferner wähle man homogene Koordinaten $(x_0,\ldots,x_m)$ in P_m . Durch $x_i(z) := \varphi_{o,i}(z)$ wird eine Abbildung $\Phi_{\mathfrak{g}} : X - B \longrightarrow P_m$ definiert. $\Phi_{\mathfrak{g}}$ läßt sich als meromorphe Abbildung (also nach 1.1.4 und [40] als rationale Abbildung) von X auf eine irreduzible Untervarität $Y = \Phi_{\mathfrak{g}}(X)$ auffassen. (Ihr Graph kann als abgeschlossene Hülle des Graphen von $\Phi_{\mathfrak{g}}|X - B$ in $X \times P_m$ definiert werden (vgl. [35] und [33] p.19). Ein Bündel $\mathfrak{g}$, für das $\Phi_{\mathfrak{g}}$ eine bireguläre Einbettung von X in P_m ist, heiße <u>projektiv-induziert</u>.

Satz 3.2.1.

Ein holomorphes Geradenbündel ξ über einer Hodge-Mannigfaltigkeit X ist genau dann positiv, wenn für eine hinreichend große natürliche Zahl k Φ_{ξ^k} projektiv-induziert ist.

Für meromorphe Abbildungen gilt folgende leicht zu beweisende Aussage, die im Beweis von 3.2.4 benutzt wird.

Lemma 3.2.2.

Es sei $\tau : X \longrightarrow Y$ eine meromorphe Abbildung eines irreduziblen kompakten komplexen Raumes X auf einen komplexen Raum Y. N sei die Singularitätenmenge von τ. Dann ist $Y - \tau(X-N)$ in einer niederdimensionalen analytischen Teilmenge von Y enthalten. 7)

Beweis: Es sei X' der Graph von τ in $X \times Y$, π bzw. τ' die Projektion von X' auf X bzw. Y. π ist eine eigentliche Modifikationsabbildung ([35] Satz 34'). Es sei $N' = \pi^{-1}(N)$, $\tau'' := \tau' | N'$ und E' bzw. E'' die Entartungsmenge von τ' bzw. τ''. Nach [35], Satz 24 ist für jede analytische Teilmenge $M \subset X'$ $\tau'(M)$ eine $r_{\tau'}(M)$-dimensionale analytische Teilmenge von Y. (Dabei bezeichnet $r_{\tau'}(M)$ den Rang, d.h. die maximale Faser-Codimension der Beschränkung von τ' auf M). Ist nun $r_{\tau'}(N') < \dim Y$, so ist nichts zu beweisen, da $\tau(X-N) \supset Y - \tau'(N')$. Angenommen also $r_{\tau'}(N') = \dim Y$, d.h. $\tau''(N') = Y$; $\tau'(E')$ bzw. $\tau''(E'')$ sind mindestens 2-codimensional (siehe [35] Satz 26). Behauptung: $\tau(X-N) \supset Y - (\tau'(E') \cup \tau''(E''))$. Denn sei etwa $q \in Y - (\tau'(E') \cup \tau''(E''))$. Aus $\tau'^{-1}(q) \subset N'$ würde für $p \in \tau'^{-1}(q)$ folgen $r_{\tau''}(p) \leq r_{\tau'}(p) - 1$, während doch, da $p \notin E', E''$, $r_{\tau''}(p) = r_{\tau'}(N') = \dim Y = r_{\tau'}(X') = r_{\tau'}(p)$. Also gilt $\tau'^{-1}(q) \not\subset N'$, d.h. $q \in \tau(X-N)$. Damit ist 3.2.2 bewiesen.

Für den Rest dieses Paragraphen sei X_n eine Kählersche Mannigfaltigkeit, die zu Q_n diffeomorph ist, $(n \neq 2)$, $g \in H^2(X,Z)$ das positive erzeugende Element, $\mathfrak{g}$ ein holomorphes Geradenbündel über X_n mit $c_1(\mathfrak{g}) = g$. Für gerades n werde ferner vorausgesetzt, daß $c_1(X) = ng$. Damit gilt wegen 1.1.3 und 2.2.4 mit 3.1.2

$$\dim \Gamma(\mathfrak{g}) = n + 2$$

Es wird gezeigt werden, daß $\phi_{\mathfrak{g}}(X_n) \subset P_{n+1}$ eine singularitätenfreie Quadrik Q_n und $\phi_{\mathfrak{g}}: X_n \longrightarrow Q_n$ biregulär ist.

Das Urbild bzgl. $\phi_{\mathfrak{g}}$ eines durch eine Gleichung $a_o x_o + \ldots + a_{n+1} x_{n+1} = 0$ gegebenen Hyperebenenschnittes ist der durch $a_o \varphi_o + \ldots a_{n+1} \varphi_{n+1} = 0$ gegebene Divisor. Zur Bestimmung der Ordnung von $\phi_{\mathfrak{g}}(X) \subset P_{n+1}$ hat man daher die den Hyperebenenschnitten entsprechenden Divisoren auf X zu untersuchen. In diesem Zusammenhang wird das folgende Lemma benötigt:

Lemma 3.2.3.

Es seien $D_1, \ldots, D_s$ effektive Divisoren [8] mit $c(D_i) = g$ Dann sind die D_i irreduzible Untervarietäten und $D_1 \cap \ldots \cap D_s$ hat höchstens zwei Komponenten.

Beweis: $g \in H^2(X,Z)$ sei das positive erzeugende Element. Man kann eine Basis $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ bzw. $\{e_i, e'_m\}_{i=1,\ldots,n}$ von $H^*(X,Z)$ wählen, so daß die Beziehungen des Satzes 3.1.1 gelten. Dann gilt für einen r-dimensionalen Zykel $Z_r = \sum n_i W_i$ mit $n_i > 0$ und $c(Z_r) = a \cdot e_{n-r}$, daß $a > 0$ und daß Z_r aus höchstens a Komponenten W_i besteht. (Im Falle $n=2m$ ist $r \neq m$ vorauszusetzen.) Speziell haben also die D_i nur eine Komponente.

Das Lemma wird nun bewiesen, indem man nacheinander D_1, $D_1 \cap D_2, \ldots, D_1 \cap \ldots \cap D_s$ betrachtet. Es ist $c(D_i) = g$. Falls $D_1 = D_2$, ist nichts zu beweisen. Anderenfalls ist $D_1 \cdot D_2$ definiert und $c(D_1 \cdot D_2) = g^2 = ae_2$ $(a = 1$ oder $a = 2)$.

$D_1 \cdot D_2$ hat also nach dem Argument zu Beginn des Beweises höchstens zwei Komponenten, und falls $\dim D_1 \cdot D_2 > \frac{n}{2}$, höchstens eine. (Für $D_1 \cap \ldots \cap D_j \neq \emptyset$ ist $\dim D_1 \cap \ldots \cap D_j \geq n-j$). Auf diese Weise fährt man nötigenfalls fort, bis evtl. $\dim D_1 \cap \ldots \cap D_j = m+1$. Für $n = 2m+1$ schließt man dann folgendermaßen weiter: Für $D_1 \cap \ldots \cap D_j \not\subset D_{j+1}$ ist $(D_1 \cap \ldots \cap D_j) \cdot D_{j+1}$ definiert und $c((D_1 \cap \ldots \cap D_j) \cdot D_{j+1}) = g^{m+1}$. $D_1 \cap \ldots \cap D_{j+1}$ hat also höchstens zwei Komponenten. Hat es wirklich zwei, etwa W', W'', so gilt $c(W') = c(W'') = e_{m+1}$, und man kann im weiteren Verlauf der Induktion W', W'' einzeln mit den D_i zum Schnitt bringen. Dabei erhält man jeweils nur eine Komponente, insgesamt also höchstens zwei. Hat aber $D_1 \cap \ldots \cap D_{j+1}$ nur eine Komponente, so läuft die Induktion weiter wie bisher, bis evtl. zwei Komponenten auftreten, auf die dann das obige Argument anzuwenden ist.

Im Fall $n = 2m$ schließt man bei der mittleren Dimension folgendermaßen: Für $D_1 \cap \ldots \cap D_j \not\subset D_{j+1}$ ist $(D_1 \cap \ldots \cap D_j) \cdot D_{j+1}$ $= n_1 W_1 + \ldots + n_r W_r$ definiert und hat die Cohomologieklasse g^m. Es ist

$$2 = (g^m \cup g^m)[X_n] = \sum_{i=1}^{r} n_i (g^m \cup c(W_i))[X_n].$$

Daraus folgt wegen $n_i > 0$ und $g^m \cup c(W_i)[X_n] > 0$, daß der Schnittzykel aus höchstens zwei Komponenten besteht. Hat er wirklich zwei, etwa W_1, W_2, so gilt $g^m \cup c(W_i)[X_n] = 1$, also mit $g \cup c(W_i) =: a_i e_{m+1}$ $1 = (g^{m-1} \cup (g \cup c(W_i))[X_n] =$ $a_i e_n [X_n] = a_i$, d.h. $g \cup c(W_i) = e_{m+1}$, und damit verläuft die weitere Induktion wie für ungerades n.

Lemma 3.2.4.

Unter den obigen Voraussetzungen ist $Y = \Phi_{\mathfrak{g}}(X_n)$ eine irreduzible Untervarietät der Ordnung 2 in P_{n+1}.

Beweis: Es sei r die Ordnung von Y. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n+1}$ ist Y sicher nicht in einer

Hyperebene enthalten, also kein projektiver Teilraum, also $r \neq 1$. Es genügt daher, $r > 2$ zum Widerspruch zu führen. Wäre $r \geq 3$, so gäbe es einen $P_{n+1-s} \subset P_{n+1}$ $(s = \dim Y)$, der Y in mindestens drei verschiedenen isolierten Punkten $q_1, q_2, q_3 \in \Phi_{\xi}(X_n - B)$ schneidet. (Beweis: Es sei G die Graßmannsche Mannigfaltigkeit der $(n+1-s)$-dimensionalen projektiven Teilräume von P_{n+1}. Diejenigen P_{n+1-s}, die nicht Y in r verschiedenen Punkten schneiden, sind in einer echten algebraischen Teilmenge $A_1 \subset G$ enthalten. Ebenso sind, da nach 3.2.2 $\Phi_{\xi}(X) - \Phi_{\xi}(X-B)$ in einer echten algebraischen Teilmenge von Y enthalten ist, diejenigen P_{n+1-s}, die $Y - \Phi_{\xi}(X-B)$ treffen, in einer echten algebraischen Teilmenge $A_2 \subset G$ enthalten. Jeder $P_{n+1-s} \in G - A_1 - A_2$ schneidet $\Phi_{\xi}(X-B)$ in r isolierten Punkten). Sind etwa $p_1, p_2, p_3 \in X_n - B$ Urbildpunkte zu q_1, q_2, q_3, so liegen, da nach 3.2.3 $\Phi_{\xi}^{-1}(P_{n+1-s} \cap \Phi_{\xi}(X))$ in höchstens zwei Komponenten zerfällt, zwei Punkte, etwa p_1 und p_2, in derselben Komponente W. $W - B \neq \emptyset$ ist zusammenhängend, also ist auch $\Phi_{\xi}(W-B)$ zusammenhängend, und es enthält die beiden Punkte $q_1 \neq q_2$, im Widerspruch dazu, daß P_{n+1-s} nur in isolierten Punkten schneidet.

Satz 3.2.5.

Eine irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit V der Dimension r und der Ordnung 2 in P_m ist bereits in einem projektiven Teilraum der Dimension $r+1$ enthalten.

Der Beweis wird durch Induktion über $r = \dim V$ geführt. Sei $r = 1$. Eine geeignete Hyperebene schneidet V_1 in zwei Punkten p_1, p_2. Sei p_3 ein weiterer Punkt von V_1. Dann liegt V in dem durch p_1, p_2, p_3 bestimmten 2-dimensionalen Teilraum P_2. Denn gäbe es einen Punkt $p \in V$, $p \notin P_2$, so könnte man eine Hyperebene H durch p_1, p_2, p finden mit

$p_3 \notin H$, d.h. $V \not\subset H$, und H würde V in mehr als zwei Punkten schneiden, was wegen $\operatorname{ord} V = 2$ unmöglich ist.
Der Schluß von $r-1$ auf r verläuft ähnlich. Ein allgemeiner Hyperebenenschnitt einer irreduziblen Mannigfaltigkeit V_r mit $r>1$ ist irreduzibel (siehe [21] p.78). Sei $V_{r-1} \subset V_r$ ein solcher Hyperebenenschnitt. Es ist $\operatorname{ord} V_{r-1} = 2$. Also ist nach Induktionsvoraussetzung V_{r-1} in einem P_r enthalten. Sei $p \in V_r$, $p \notin P_r$, und P_{r+1} der von P_r und p aufgespannte projektive Teilraum. Es gilt $V_r \subset P_{r+1}$. Denn wäre $q \in V_r$, $q \notin P_{r+1}$, so gäbe es eine Hyperebene H mit $P_r \subset H$, $q \in H$, $p \notin H$ und für diese wäre $V_r \not\subset H$ und $\operatorname{ord}(V_r \cdot H) > 2$, was unmöglich ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Lemma 3.2.6.

$\Phi_{\mathfrak{g}}$ ist eine biholomorphe Abbildung von X_n auf eine singularitätenfreie Quadrik.

Beweis: Nach 3.2.4 und 3.2.5 ist Y jedenfalls eine irreduzible Hyperfläche der Ordnung 2 in P_{n+1}. Es sei H_{N+1} der komplexe Vektorraum der homogenen Polynome k-ten Grades in $n+2$ Variablen. Es ist $N+1 = \binom{n+k+1}{n+1}$. Ist $\psi(x_0,\dots,x_{n+1}) \in H_{N+1}$, so ist $\psi(\varphi_0,\dots,\varphi_{n+1}) \in \Gamma(\mathfrak{g}^k)$. Es ist $\psi(\varphi_0,\dots,\varphi_{n+1}) \equiv 0$ auf X_n genau wenn $\psi(x_0,\dots,x_{n+1}) \equiv 0$ auf Y_n. Also ist die Dimension des komplexen Vektorraumes $\{\psi(\varphi_0,\dots,\varphi_{n+1}) \mid \psi \in H_{N+1}\} \subset \Gamma(\mathfrak{g}^k)$ gleich der k-Postulation $\rho_k(Y_n)$ von Y_n, und diese ist nach Satz 1.1.3 und 3.1.3 gleich $\dim \Gamma(\mathfrak{g}^k)$. Es gibt also eine Basis von H_{N+1} $\psi_0,\dots,\psi_m,\dots,\psi_N$ $(m = \dim \Gamma(\mathfrak{g}^k)-1)$, so daß $\psi_0(\varphi_i),\dots,\psi_m(\varphi_i)$ eine Basis von $\Gamma(\mathfrak{g}^k)$ bilden und daß $\psi_{m+1},\dots,\psi_N$ auf Y_n identisch verschwinden. Ist k hinreichend groß, so wird nach Satz 3.2.1 durch $z \longrightarrow (\psi_0(\varphi_i(z)),\dots,\psi_m(\varphi_i(z)))$ eine biholomorphe Einbettung $\Phi_{\mathfrak{g}^k}: X \longrightarrow P_m$ definiert. Ferner definiert $(x_0,\dots,x_{n+1}) \longrightarrow (\psi_0(x_i),\dots,\psi_N(x_i))$ eine biholomorphe

Abbildung von P_{n+1} in P_N, die durch Beschränkung eine biholomorphe Einbettung $\psi : Y_n \longrightarrow P_m \subset P_N$ induziert. Also gilt $B = \emptyset$. Das folgende Diagramm ist kommutativ

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "\phi_\xi"] \arrow[dr, "\phi_{\xi K}"'] & Y_n \arrow[d, "\psi"] \\ & P_m \end{tikzcd}$$

Daraus entnimmt man, daß ϕ_ξ eine biholomorphe Abbildung von X_n auf Y_n ist und Y_n also singularitätenfrei, d.h. nach Lemma 3.2.5 eine n-dimensionale singularitätenfreie Quadrik ist. Damit ist alles bewiesen.
Im vorausgehenden ist $n > 2$ vorausgesetzt worden. Der Fall $n = 2$ wird in § 4 behandelt. Der Fall $n = 1$ ist trivial, da Q_1 rational, d.h. aber biholomorph äquivalent zu P_1 ist und alle kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht 0 konform äquivalent sind.

Insgesamt ist damit bewiesen:

Satz 3.2.7.
X sei eine komplex n-dimensionale kompakte Kählersche Mannigfaltigkeit, die als differenzierbare Mannigfaltigkeit C^∞-diffeomorph zur singularitätenfreien komplexen projektiven Quadrik Q_n ist $(n \neq 2)$. Dann gilt:
Ist n ungerade, so ist X biholomorph äquivalent zu Q_n.
Ist n gerade, so ist die erste Chernsche Klasse von X $c_1 = \pm\, ng$ (wo g das positive erzeugende Element von $H^2(X,Z)$ ist), und X ist biholomorph äquivalent zu Q_n genau wenn $c_1 = +\, ng$.

Bezüglich der komplexen Deformationen einer Quadrik gelten die gleichen Aussagen wie für projektive Räume:

Satz 3.2.8

i) Jede hinreichend kleine Deformation einer komplexen Quadrik Q_n $(n \neq 2)$ ist Q_n.

ii) Allgemeiner gilt:
Die komplexe Struktur jeder einfach-zusammenhängenden homogenen kompakten Kählerschen Mannigfaltigkeit ist lokal stabil.

iii) Jede Kählersche Deformation von Q_n $(n \neq 2)$ ist Q_n. [14)]

In 3.2.8 und 4.5.1 ii) heißt V eine Kählersche Deformation von V_o, wenn V und V_o zu einer Familie von komplexen Strukturen gehören, die alle Kählersch sind.

Beweis: i) folgt aus 3.2.7 und 4.5.2 oder aus der allgemeineren Aussage ii), die von Bott bewiesen wurde. Bott zeigt nämlich in [5], Theorem VII: Es sei X eine einfach zusammenhängende homogene kompekte Kählersche Mannigfaltigkeit, Θ die Garbe der Keime holomorpher kontravarianter Vektorfelder auf X. Dann ist $H^i(X,\Theta) = 0$ für $i \geq 1$. Hieraus und aus dem Stabilitätssatz von Frölicher-Nijenhuis (siehe z.B. [27], Theorem 6.3) folgt dann die Behauptung ii).
iii) Eine Deformation von Q_n ist natürlich erst recht diffeomorph zu Q_n. Damit folgt im Fall n ungerade iii) unmittelbar aus dem Hauptsatz 3.2.7. Für gerades n braucht man nach 3.2.7 nur die Möglichkeit $c_1(X) = - n\,g$ auszuschließen, und das geschieht folgendermaßen: Es sei $\mathcal{V} = \{ V_t \mid -1 < t < 1 \}$ eine einparametrige differenzierbare Familie komplexer Strukturen. Es ist klar, daß es wegen der lokalen Stabilität von Q_n genügt zu zeigen, daß V_o eine Quadrik ist, wenn V_o Kählersch ist und wenn V_t für $t > 0$ eine Q_n ist.
Es sei $\mathfrak{F}$ das Bündel entlang den Fasern der Familie $\mathcal{V}$.
$\mathfrak{F}$ ist eine Familie von komplexen Vektorbündeln und daher ist

das inverse Bündel zum n-fachen alternierenden Produkt des dualen Bündels $\mathfrak{f}^*$ eine Familie von holomorphen Geradenbündeln (im Sinne von [27] Def. 1.8). Die Beschränkung ξ_t auf eine Faser V_t ist dual zum kanonischen Bündel von V_t. Daher ist für $t>0$ $\dim H^0(V_t, \xi_t) = \chi(V_t, \xi_t) > 0$, während, wenn die erste Chernsche Klasse von V_o negativ wäre, ξ_o negativ und daher $\dim H^0(V_o, \xi_o) = 0$ wäre. Dies steht aber - und damit ist iii) bewiesen - im Widerspruch zu dem folgenden Satz von Kodaira-Spencer. (Siehe [27], Theorem 2.1)

<u>Satz 3.2.9.</u> (Oberhalbstetigkeit)
Es sei $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow M$ eine Familie komplex-analytischer Vektorbündel zu der Familie von komplexen Strukturen $\mathcal{V}$. (B_t bezeichne die Beschränkung von $\mathcal{B}$ auf V_t). Dann gibt es zu jedem Punkt $o \in M$ eine Umgebung U, so daß für alle $t \in U$

$$\dim H^q(V_t, B_t) \leqslant \dim H^q(V_o, B_o)$$

<u>Eine Anwendung des Hauptsatzes:</u>
Der Beweis von 3.2.7 bestand aus zwei Teilresultaten: nämlich aus 2.2.4 und aus der folgenden Aussage: Eine algebraische Mannigfaltigkeit X_n, deren Cohomologiering, erste Chernsche Klasse und Pontrjaginsche Klassen dieselben sind wie bei der Quadrik Q_n, ist biholomorph äquivalent zu Q_n. Dieser zweite Teil wurde von A. van de Ven wesentlich benutzt, um den folgenden Satz über Kompaktifizierungen zu beweisen (siehe [42] 4.4)

<u>Satz 3.2.10.</u>
Es sei V_3 eine Kählersche Mannigfaltigkeit, $W_2 \subset V_3$ eine Fläche mit genau einem singulären Punkt, der ein gewöhnlicher Doppelpunkt ist, und es sei $V - W$ eine komplexe Homologie-3-Zelle. Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung φ von V_3 auf die komplexe Quadrik $Q_3 \subset P_4$, so daß $\varphi(W) = Q_3 \cap T$, wo T eine Tangentialhyperebene an Q_3 in P_4 ist.

§ 4. Σ-Mannigfaltigkeiten

4.1. Holomorphe P_n-Bündel über P_1

Definition: Eine Σ-Mannigfaltigkeit ist ein holomorphes Faserbündel über P_1 mit Faser P_n $(n \geq 1$, Strukturgruppe $PGL(n,C)$).

Diese Definition verallgemeinert die in [15] untersuchten Σ-Flächen. Die Σ-Flächen sind genau die zweidimensionalen Σ-Mannigfaltigkeiten.
Die Σ-Mannigfaltigkeiten lassen sich bereits durch eine (nur scheinbar) schwächere Eigenschaft charakterisieren:

Lemma 4.1.1.
X_{n+1} sei eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, die sich holomorph so auf P_1 abbilden läßt, daß alle Fasern biholomorph äquivalent zu P_n sind. Dann ist X_{n+1} eine Σ-Mannigfaltigkeit.

Dies ist ein Spezialfall eines wesentlich allgemeineren von Grauert angegebenen Satzes (siehe z.B. [11] p.71) 8')
$f: X \longrightarrow Y$ sei eine holomorphe eigentliche surjektive Abbildung, deren Fasern alle biholomorph äquivalent sind. Dann ist X ein lokaltriviales holomorphes Faserbündel über Y. Da hierfür kein Beweis veröffentlicht ist, wird 4.1.1 hier direkt bewiesen, und zwar als unmittelbare Folgerung aus den folgenden zwei Lemmas.
Lemma 4.1.2.
Die holomorphe Abbildung $f: X_{n+1} \longrightarrow P_1$ ist unter den Voraussetzungen von 4.1.1 eine holomorphe Faserung.

Dabei ist unter einer holomorphen Faserung (E,π,B,F) mit dem komplexen Raum F als Faser eine holomorphe Abbildung $\pi : E \longrightarrow B$ zweier komplexer Räume mit folgender Eigenschaft zu verstehen: Es gibt eine Überdeckung $\{U_i\}$ von B, so daß $\pi^{-1}(U_i)$ fasertreu biholomorph auf $U_i \times F$ abgebildet werden kann.

Hierfür wird in [37] 2.1 bewiesen

Lemma 4.1.3.

i) Jede holomorphe Faserung (E,π,B,F) mit kompakter Faser ist ein holomorphes Faserbündel mit der komplexen Lieschen Gruppe $G(F)$ der Biholomorphismen von F als Strukturgruppe.

ii) (E,π,B,F) und (E',π',B',F) seien holomorphe Faserungen mit kompakter Faser F. Jede biholomorphe fasertreue Abbildung $\mu : E \longrightarrow E'$ ist eine holomorphe $G(F)$-Faserbündelabbildung.

Beweis von 4.1.2 (nach einer Mitteilung von G. Fischer, Erlangen). Es sei $\pi : X_{n+1} \longrightarrow P_1$ die Abbildung mit P_n als Faser, $p \in P_1$, $F := \pi^{-1}(p)$. Für eine geeignete Umgebung U von p ist die Umgebung $W = \pi^{-1}(U)$ von F in X biholomorph äquivalent zu einer Umgebung der Nullschnittfläche im komplexen Normalenbündel von F. Behauptung: Für Punkte p' genügend nahe bei p ist die Projektion im Normalenbündel eine unverzweigte Überlagerungsabbildung der Faser $\pi^{-1}(p')$ auf F. Dies zeigt man, indem man für die Umgebung eines Punktes $q \in F$ in X_{n+1} lokale komplexe Koordinaten $y, z_1, \ldots, z_n$ einführt, bzgl. derer F durch $y = 0$ gegeben wird, und in der Umgebung U von p eine komplexe Koordinate $h : U \longrightarrow C$ mit $h(p) = 0$, und dann den Weierstraßschen Vorbereitungssatz auf die Funktion $h \circ \pi(y, z_1, \ldots, z_n)$ anwendet. Nun gibt es aber wegen des einfachen Zusammenhangs von P_n keine nichttriviale unverzweigte Überlagerung von P_n. Daher ist $\pi^{-1}(p')$ ein holomorpher, vom Nullschnitt $\pi^{-1}(p)$

verschiedener Schnitt im Normalenbündel. Das Normalenbündel ist also trivial, und die Abbildung π stimmt mit der Projektionsabbildung überein, womit die Lokaltrivialität bewiesen ist.

Bemerkung: Wäre bekannt, daß der Rang der Funktionaldeterminante von π überall maximal ist, so wäre 4.1.1 ein Spezialfall von [27] 18.3.

Da [37] noch nicht veröffentlicht ist, wird hier Remmerts Beweis von 4.1.3 wiedergegeben. Er benutzt folgenden

Hilfssatz: Es seien H_1, H_2, Z komplexe Räume, $\beta_i : H_i \times Z \longrightarrow Z$ holomorphe Abbildungen und β_2 offen; Für alle $h_2', h_2'' \in H_2$ $h_2' \neq h_2''$ seien die Abbildungen $z \longrightarrow \beta_2(h_2', z)$ und $z \longrightarrow \beta_2(h_2'', z)$ verschieden. Dann gilt:
Jede Abbildung $\varphi : H_1 \longrightarrow H_2$ mit $\beta_2 \circ (\varphi \times id_Z) = \beta_1$ ist holomorph.

Beweis hierfür:[7] φ ist stetig, weil β_2 offen ist. Nach [35] 31,31' genügt es also zu zeigen, daß Graph φ eine analytische Menge in $H_1 \times H_2$ ist. Da β_1, β_2 holomorph sind, definiert $(h_1, h_2, z) \longrightarrow (\beta_1(h_1, z), \beta_2(h_2, z))$ eine holomorphe Abbildung $\beta : H_1 \times H_2 \times Z \longrightarrow Z \times Z$, und Graph β und $M := \text{Graph}\,\beta \cap H_1 \times H_2 \times Z \times \Delta$ (wo Δ = Diagonale in $Z \times Z$) ist analytisch in $H_1 \times H_2 \times Z \times \Delta$. Die Projektion $\pi : M \longrightarrow H_1 \times H_2 \times Z$ ist holomorph, injektiv, eigentlich, daher ist $\pi(M)$ analytisch in $H_1 \times H_2 \times Z$. $\sigma : \pi(M) \longrightarrow H_1 \times H_2$ sei die kanonische Projektion. Nach [35] Satz 17 ist $N := \{ a \in \pi(M) \mid \dim_a \sigma^{-1}(\sigma(a)) \geq \dim Z \}$ analytisch in $H_1 \times H_2 \times Z$. Wegen $\dim_a \sigma^{-1}(\sigma(a)) \leq \dim Z$ gilt $N = \sigma(N) \times Z$. Daher ist $\sigma(N) = \text{Graph}\,\varphi$ analytisch in $H_1 \times H_2$.

Beweis von 4.1.3 ii) Die durch μ induzierte Abbildung $\tilde{\mu} : B \longrightarrow B'$ ist holomorph nach einem Satz von Stein, da $\tilde{\mu}\pi = \pi'\mu$ holomorph und π holomorph, offen und surjektiv ist. (K.Stein: Analytische Zerlegungen komplexer

Räume, Math. Ann. 132, 63–93 (1956), Satz 2). Es seien nun (U,h), (U',h') zwei wegen der Lokaltrivialität der Faserungen existierende Faserkoordinatensysteme für $U \subset B$, $U' \subset B'$; $h'\mu h^{-1}: (U \cap \tilde{\mu}^{-1}(U')) \times F \longrightarrow U' \times F$ wird durch $(b,w) \longrightarrow (\tilde{\mu}(b), \psi(b)\cdot w)$ mit $\psi(b) \in G(F)$ gegeben. Zu zeigen ist die Holomorphie von $\psi: U \cap \tilde{\mu}^{-1}(U') \longrightarrow G(F)$. $G(F)$ operiert effektiv auf F und die zugehörige Abbildung $\alpha: G(F) \times F \longrightarrow F$ ist offen. Daher hat man mit $\beta_2 := \alpha$, $\varphi := \psi$, $\beta_1 := \alpha\cdot(\psi \times id_F)$ und $H_1 := U \cap \tilde{\mu}^{-1}(U')$, $H_2 := G(F)$, $Z := F$ die Situation des Hilfssatzes, denn auch β_1 ist holomorph, weil $\beta_1 = ph'\mu h^{-1}$ ($p: U' \times F \longrightarrow F$ die Projektion). Also ist ψ holomorph, was zu beweisen war. Spezialisierung auf $\mu = id_E$ liefert 4.1.3 i).

Eine im folgenden benutzte Anwendung von 4.1.3 ist

Lemma 4.1.4.
(E,π,B,F), (E',π',B,F) seien holomorphe $G(F)$-Faserbündel, wo F eine d-dimensionale projektiv algebraische Mannigfaltigkeit mit $\dim F > \dim B$ und mit analytischer Bettizahl $b^a_{2d-2}(F) < 2$ ist.
Dann ist jede biholomorphe Abbildung $\mu: E \longrightarrow E'$ eine holomorphe $G(F)$-Faserbündelabbildung.

Beweis: In [36] Satz 1.3 wird bewiesen: Jede dimensionserniedrigende holomorphe Abbildung einer projektiv algebraischen Mannigfaltigkeit F_d mit $b^a_{2d-2}(F) < 2$ ist konstant. Anwendung auf $\pi'\cdot\mu|_{\pi^{-1}(q)}$ $(q \in B)$ liefert die Fasertreue und damit nach 4.1.3 die Behauptung.

Korollar 4.1.5.
Jede biholomorphe Abbildung zwischen zwei Σ-Mannigfaltigkeiten läßt sich als holomorphe Faserbündelabbildung auffassen. (Wobei zu beachten ist, daß $P_1 \times P_1$ auf zwei Arten gefasert werden kann.)

Für Faser P_n mit $n > 1$ ist 4.1.5 wegen 4.1.4 und $b^a_{2n-2}(P_n) = 1$ trivial. Für den Fall $n = 1$ sei auf [33] Satz 18 verwiesen, wo für biholomorphe Abbildungen von Σ-Flächen die Fasertreue bewiesen wird (mit Ausnahme der Automorphismen von $P_1 \times P_1$).

Das folgende Lemma führt zu einer Übersicht über alle Σ-Mannigfaltigkeiten.

Lemma 4.1.6.

Für eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit X mit $h^{0,2} = 0$ und $H^3(X,Z) = 0$ ist jedes holomorphe Faserbündel über X mit Faser P_n durch ein holomorphes Vektorraumbündel über X mit Faser C^{n+1} induziert, d.h.

$$H^1(X, GL(n+1,C)_\omega) \longrightarrow H^1(X, PGL(n,C)_\omega)$$

ist surjektiv. Insbesondere ist also jede Σ-Mannigfaltigkeit durch ein holomorphes Vektorraumbündel über der Riemannschen Zahlenkugel induziert.

Beweis: Man hat exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow C^* \longrightarrow GL(n+1,C) \longrightarrow PGL(n,C) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow C^*_\omega \longrightarrow GL(n+1,C)_\omega \longrightarrow PGL(n,C)_\omega \longrightarrow 0$$

und daher nach [13] 5.7.11 den Anfang einer exakten Cohomologiesequenz

$$\ldots \to H^1(X,C^*_\omega) \to H^1(X,GL(n+1,C)_\omega) \longrightarrow H^1(X,PGL(n,C)_\omega) \to H^2(X,C^*_\omega).$$

Aus einer exakten Cohomologiesequenz

$$\ldots \longrightarrow H^2(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^2(X,C^*_\omega) \longrightarrow H^3(X,Z) \longrightarrow \ldots ,$$

die sich von

$$0 \to Z \to C \to C^* \to 0$$
$$0 \to Z \to C_\omega \to C^*_\omega \to 0$$

herleitet (vgl. [18] 2.5), erhält man $H^2(X,C^*_\omega) = 0$ und damit 4.1.6.

Bemerkung: Ein Beispiel für ein Bündel mit Faser P_n, das von keinem Vektorbündel herkommt, wird in [7] 1.6.4 konstruiert.

4.1.6. ermöglicht die Anwendung des folgenden, im wesentlichen schon von Birkhoff bewiesenen Resultates von Grothendieck [14] :

Satz 4.1.7.

Jedes holomorphe Vektorraumbündel über P_1 zerfällt als holomorphes Bündel in eine direkte Summe von holomorphen Geradenbündeln, die bis auf Isomorphie und Reihenfolge eindeutig bestimmt sind. 9)

Damit kommt man zu der folgenden Beschreibung der Σ-Mannigfaltigkeiten:

In P_1 seien (y_0, y_1) homogene Koordinaten. Es sei $h \in H^2(P_1, Z)$ das positive erzeugende Element. ζ sei das Hopfsche Geradenbündel über P_1, d.h. das zu der C^*-Faserung $C^2 - \{0\} \longrightarrow P_1$ assoziierte Geradenbündel. Es ist $c_1(\zeta) = -h$.
Es sei $U_i := \{ (y_0, y_1) \in P_1 \mid y_i \neq 0 \}$. Bezüglich $\{U_i\}$ wird ζ durch die transition-functions $f_{ij} = y_i/y_j$ gegeben.

Definition: $0 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant \dots \leqslant a_n$ seien ganze Zahlen. $\Sigma_{a_1, \dots, a_n}$ ist die durch $\zeta^{a_0} \oplus \zeta^{a_1} \oplus \dots \oplus \zeta^{a_n}$ induzierte Σ-Mannigfaltigkeit.
Bezüglich $\{U_i\}$ ist also $\Sigma_{a_1, \dots, a_n}$ durch die transition-Funktionen

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} (y_i/y_j)^{a_0} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (y_i/y_j)^{a_n} \end{pmatrix}$$

gegeben.

Satz 4.1.8.

i) Jede Σ-Mannigfaltigkeit ist eine $\Sigma_{a_1,\dots,a_n}$-Mannigfaltigkeit.

ii) Σ_{a_1}-Flächen im Sinn der obigen Definition und im Sinne von [15] sind identisch.

iii) $\Sigma_{a_1,\dots,a_n}$ ist biholomorph äquivalent zu $\Sigma_{b_1,\dots,b_n}$ genau wenn $a_i = b_i$ für $i=1,\dots,n$.

Beweis: i) Wie bereits erwähnt, hat man für eine Garbe von Gruppen $\mathfrak{F}$ im Zentrum einer Garbe von Gruppen $\mathfrak{G}$ über X den Anfang einer exakten Cohomologiesequenz, siehe [13] 5.5.2, 5.7.11. $H^1(X,\mathfrak{F})$ operiert auf $H^1(X,\mathfrak{G})$ durch Permutationen, und zwar wird dies für Cozykeln f_{ij}, g_{ij} mit Koeffizienten in $\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{G}$ durch punktweise Multiplikation definiert, also $g_{ij} \longrightarrow f_{ij}\cdot g_{ij}$. Zwei Elemente aus $H^1(X,\mathfrak{G})$ werden genau dann durch $H^1(X,\mathfrak{G}) \longrightarrow H^1(X, \mathfrak{G}/\mathfrak{F})$ in dasselbe Element abgebildet, wenn sie durch eine Operation von $H^1(X,\mathfrak{F})$ ineinander überführt werden. Angewandt auf $X := P_1$, $\mathfrak{F} := C^*_\omega$, $\mathfrak{G} := GL(n+1,C)_\omega$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{F} := PGL(n,C)_\omega$ liefert dies zusammen mit 4.1.6, 4.1.7 und der Klassifikation der holomorphen Geradenbündel über P_1, daß jedes holomorphe P_n-Bündel über P_1 induziert ist durch ein Bündel $\zeta^{b_o} \oplus \dots \oplus \zeta^{b_n}$ und daß $\zeta^{b_o} \oplus \dots \oplus \zeta^{b_n}$ und $\zeta^{d_o} \oplus \dots \oplus \zeta^{d_n}$ dasselbe Bündel induzieren, genau wenn für eine geeignete Zahl gilt

$$\zeta^{b_o} \oplus \dots \oplus \zeta^{b_n} \cong \zeta^{b} \otimes (\zeta^{d_o} \oplus \dots \oplus \zeta^{d_n})$$

Damit wird die in der Definition von $\Sigma_{a_1,\dots,a_n}$ benutzte Normierung $0 = a_o \leqslant a_1 \leqslant \dots \leqslant a_n$ möglich, und diese legt die Bündelisomorphieklasse und damit wegen 4.1.5 die komplexe Struktur fest, womit i) iii) bewiesen ist. Zu ii) siehe 4.1.9.

Satz 4.1.9.

In $P_1 \times P_{2n}$ seien $(y_o, y_1; x_o, \ldots, x_{2n})$ bihomogene Koordinaten.

$\sum_{a_1,\ldots,a_n}$ ist die durch folgende Gleichungen definierte algebraische Mannigfaltigkeit.

$$y_o^{a_i} x_{2i-1} - y_1^{a_i} x_{2i} = 0 \qquad i=1,\ldots,n \ .$$

Beweis: Durch die Gleichungen wird eine singularitätenfreie Untermannigfaltigkeit $\Sigma \subset P_1 \times P_{2n}$ definiert. Die Projektion $P_1 \times P_{2n} \longrightarrow P_1$ induziert die Abbildung $\pi : \Sigma \rightarrow P_1$. Sei $U_i := \{ (y_o, y_1) \in P_1 \mid y_i \neq 0 \}$. Durch

$h_o(y_o, y_1; x_o, \ldots, x_{2n}) := (y_o, y_1; x_o, x_2, x_4, \ldots, x_{2n})$

$h_1(y_o, y_1; x_o, \ldots, x_{2n}) := (y_o, y_1; x_o, x_1, x_3, \ldots, x_{2n-1})$

werden Bündelkarten $h_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times P_n$ definiert, und die transition-function g_{ij} zu $h_i h_j^{-1}$ hat genau die in der Definition von $\sum_{a_1,\ldots,a_n}$ angegebene Form.

Als Anwendung von 4.1.5 und 4.1.8 kann man die Automorphismengruppen der Σ-Mannigfaltigkeiten untersuchen. Das Resultat ist (vgl. [38] prop.2.8 [10]):

Satz 4.1.10

Aut($\sum_{a_1,\ldots,a_n}$) sei die komplexe Liesche Gruppe der biholomorphen Abbildungen von $\sum_{a_1,\ldots,a_n}$ auf sich, Aut(Σ)$_o$ die Komponente der Eins.

i) Der nach 4.1.5 definierte holomorphe Homomorphismus $\hat{\pi} : \mathrm{Aut}(\Sigma)_o \longrightarrow \mathrm{Aut}(P_1)$ ist surjektiv.
Für $\Sigma \neq \Sigma_o$ gilt $\mathrm{Aut}(\Sigma)_o = \mathrm{Aut}(\Sigma)$.

ii) Kern $\hat{\pi} \cong G/C^*$, wo G die multiplikative Gruppe der (n+1)-reihigen Matrizen $(b_{ij})_{i,j=0,\ldots,n}$ ist mit

$b_{ij} \in C[z]$, grad $b_{ij} \leq a_j - a_i$ (d.h. $b_{ij} = 0$ für $a_j < a_i$) und $\det(b_{ij}) \neq 0$. (wobei $a_o := 0$)

iii) $\dim_C \operatorname{Aut}(\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}) = \sum_{i,j \geq 0; a_j \geq a_i} (a_j - a_i + 1) + 2$

iv) $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ ist fasthomogen, aber nur $\Sigma_{o,\ldots,o} = P_1 \times P_n$ ist homogen.

Beweis: ii) Der Isomorphismus in ii) ist folgendermaßen gegeben: $h_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times P_n$ seien die im Beweis von 4.1.9 definierten Bündelkarten, $z = y_1/y_o$ inhomogene Koordinate in U_o . $(b_{ij}(z)) \in G/C^*$ läßt sich als holomorphe Abbildung $U_o \longrightarrow PGL(n,C)$ auffassen. (b_{ij}) ist dann das eindeutig bestimmte $b \in \operatorname{Aut}(\Sigma)$ mit $h_o b h_o^{-1}(z,w) = (z,(b_{ij}(z))\cdot w)$ zugeordnet. Zu zeigen ist die Surjektivität von $G \longrightarrow \operatorname{Kern} \hat{\pi}$. Jeder Automorphismus aus $\operatorname{Kern} \hat{\pi}$ wird durch mapping-transformations $\bar{g}_{kl} : U_l \cap U_k \longrightarrow PGL(n,C)$ gegeben, [41] 2.5. Aus dem Anfang der exakten Cohomologiesequenz

$$\ldots \longrightarrow H^o(U_l \cap U_k, GL(n+1,C)_\omega) \longrightarrow H^o(U_l \cap U_k, PGL(n,C)_\omega) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^1(U_l \cap U_k, C^*_\omega) \longrightarrow \ldots$$

zusammen mit den Verträglichkeitsbedingungen für die $\bar{g}_{kl}$ (siehe [41] 2.5.(19)) entnimmt man, daß $\bar{g}_{oo}$ durch eine Matrix beschrieben werden kann, deren Elemente Polynome $b_{ij}(z)$ sind. Aus den Verträglichkeitsbedingungen und der Tatsache, daß die $\bar{g}_{kl}$ holomorphe Abbildungen sind, folgen dann die Bedingungen grad $b_{ij}(z) \leq a_j - a_i$.

i) Um die Surjektivität von $\operatorname{Aut}(\Sigma)_o \longrightarrow \operatorname{Aut}(P_1)$ zu zeigen, genügt es zu zeigen, daß Bild $\hat{\pi}$ transitiv auf P_1 operiert. Dies sieht man so:

a) Durch $h_o b h_o^{-1}(z,w) := (az+c,w)$ wird ein $b \in \operatorname{Aut}(\Sigma)$ definiert mit $\hat{\pi} b(0) = c$.

b) Bei der in 4.1.9 betrachteten Einbettung $\Sigma \subset P_1 \times P_{2n}$

wird von der Abbildung, die durch

$y_1' = y_0 \quad x_{2i-1}' = x_{2i}$

$y_0' = y_1 \quad x_{2i}' = x_{2i-1}$

definiert ist, ein Automorphismus $b \in \mathrm{Aut}(\Sigma)$ induziert mit $\hat{\pi}\, b(0) = \infty$. a) und b) ergeben die Transitivität von Bild $\hat{\pi}$. Die übrigen Behauptungen folgen trivial aus i), ii)

4.2. Cohomologiering, Chernsche Klassen, χ-Charakteristik

Cohomologiering und Chernsche Klassen können mit verschiedenen Methoden berechnet werden. So benutzen wir beim Beweis von 4.2.1 eine algebraische Zellenzerlegung, beim Beweis von 4.2.4 die Aufspaltungsmethode.

Satz 4.2.1.

$\pi : \Sigma_{a_1,\ldots,a_n} \longrightarrow P_1$ sei die Bündel-Projektionsabbildung, $h \in H^2(P_1,Z)$ sei das positive erzeugende Element, $\nu := \pi^*h$ und $\varepsilon \in H^2(\Sigma,Z)$ die duale Cohomologieklasse einer Faser $P_n \subset \Sigma$. Dann gilt:

i) $\{\varepsilon^i, \varepsilon^i\nu \quad 0 \leqslant i \leqslant n\}$ ist eine Basis für $H^*(\Sigma,Z)$ [11)]

ii) $\varepsilon^{n+1} = \sum a_i\, \varepsilon^n\nu$ und $\nu^2 = 0$.

Beweis: Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß jede Hyperfläche H in $P_1 \times P_{2n}$ mit der Gleichung $\sum u_i x_i = 0$ bzw. $\sum v_i y_i = 0$ und $\Sigma \not\subset H$ auf Σ einen effektiven Zykel mit der dualen Cohomologieklasse ε bzw. ν ausschneidet, folgert man Satz 4.2.1 aus 1.2.1, 1.2.3 mit Hilfe der folgenden algebraischen Zellenzerlegung: Die Zerlegung besteht aus einer $(2n+2)$-Zelle, je zwei $2j$-Zellen $(1 \leqslant j \leqslant n)$ und einer

0-Zelle. Die abgeschlossenen Hüllen der Zellen sind irreduzible Untermannigfaltigkeiten von $\Sigma_{a_1,\dots,a_n}$. Es seien E_0 bzw. E_i die durch $x_0 = 0$ bzw. $x_{2i-1} = x_{2i+2}$ $(1 \leq i \leq n-1)$ gegebenen Untermannigfaltigkeiten von Σ, und F die Faser von Σ über $y_0 = 0$. Dann sind die abgeschlossenen Hüllen der beiden 2j-Zellen: $E_0 \cap \dots \cap E_{n-j}$ bzw. $F \cap E_0 \cap \dots \cap E_{n-j-1}$. Die 0-Zelle ist natürlich $F \cap E_0 \cap \dots \cap E_{n-1}$.

ii) Daß $\varepsilon^{n+1} = \sum a_i\, \varepsilon^n \nu$ ist, sieht man, indem man die Kurve $E_0 \cap E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}$ mit der durch $x_2 = x_{2n-1}$ gegebenen Untermannigfaltigkeit schneidet. Man erhält dann $\sum a_i$ Schnittpunkte, nämlich über den Punkten von P_1 mit $(y_0/y_1)^{\sum \alpha_i} = 1$.

Bemerkung: 1) Mittels einer anderen geeigneten Zellenzerlegung kann man leicht folgendes beweisen: Es sei T_i die durch $x_{2i-1} = 0$, $x_{2i} = 0$ gegebene irreduzible singularitätenfreie 1-codimensionale Untermannigfaltigkeit von $\Sigma_{a_1,\dots,a_n}$, $\tau_i = c(T_i)$ die zugehörige Cohomologieklasse. Es gilt:

i) $\tau_i = \varepsilon - a_i \nu$ $\qquad i=1,\dots,n$

ii) $\left\{1, \nu, \prod_{i=1}^{j} \tau_i, \nu \prod_{i=1}^{j} \tau_i, \quad j = 1,\dots,n\right\}$ ist eine Cohomologiebasis.

iii) $\bigcap_{i=1} T_i$ ist eine irreduzible singularitätenfreie Kurve mit Cohomologieklasse $\prod \tau_i$; $\varepsilon \prod \tau_i = 0$. Außer im Fall $\Sigma_{0,\dots,0} = P_1 \times P_n$ wird sie durch jeden Automorphismus von $\Sigma_{a_1,\dots,a_n}$ in sich transformiert.

iv) Im Fall $n=1$ ist T_1 ein Zykel mit negativem Selbstschnitt. $(\tau_1, \tau_1) = -a_1$.

2) $\Sigma_{0,\dots,0,q}$ gestattet offensichtlich eine algebraische Zellenzerlegung, deren (2n+1)-Gerüst $(P_1 \times P_{n-1}) \cup_f P_n$ ist,

wo f die Anheftung mittels Identifikation einer Faser von $P_1 \times P_{n-1}$ mit einem $P_{n-1} \subset P_n$ bedeutet. Da jede Σ-Mannigfaltigkeit homöomorph zu einem $\Sigma_{0,\ldots,0,q}$ ist (siehe 4.3.1), folgt hieraus bzgl. der oben beschriebenen CW-Struktur [12]: Alle $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ sind vom gleichen $(2n+1)$-Typ im Sinne von J.H.C.Whitehead (Combinatorial Homotopy I).

Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise werde eine Basis von $H^*(\Sigma_{a_1,\ldots,a_n};Z)$ eine q-Basis genannt, wenn sie von der Gestalt $\{\tilde{\varepsilon}^i, \tilde{\varepsilon}^i\tilde{\nu}, \; 0 \leqslant i \leqslant n; \; \tilde{\varepsilon},\tilde{\nu} \in H^2(\Sigma,Z)\}$ ist und wenn gilt: $\tilde{\nu}^2 = 0$; $\tilde{\varepsilon}^{n+1} - q\tilde{\varepsilon}^n\tilde{\nu} = 0$. Dann folgt aus 4.2.1 durch triviale Rechnung:

<u>Korollar 4.2.2.</u>

Für $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ mit $\sum a_i = r(n+1) + q$, $0 \leqslant q \leqslant n$, $r \geqslant 0$ sei ε, ν wie in 4.2.1 definiert. Dann gilt

i) Durch ε', ν' wird eine q-Basis erzeugt, wobei

$$\begin{pmatrix}\varepsilon'\\ \nu'\end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix}1 & -r\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \nu\end{pmatrix}$$

ii) ε', ν' mögen eine q-Basis erzeugen, $0 \leqslant q \leqslant n$. Dann erhält man alle weiteren s-Basen mit $0 \leqslant s \leqslant n$ durch

$$\begin{pmatrix}\varepsilon''\\ \nu''\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\varepsilon'\\ \nu'\end{pmatrix}$$, wobei A eine der nachstehend aufführten Matrizen ist:

a) $q=0$ und $n>1$

$$\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) $q=0$ und $n=1$

$$\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \pm\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

c) $q \neq 0$ und $n > 1$

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die an zweiter Stelle aufgeführte Matrix führt auf eine $(n+1-q)$-Basis.

d) $q \neq 0$ und $n=1$

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

iii) $H^*(\sum_{a_1,\dots,a_n};Z) \cong H^*(\sum_{b_1,\dots,b_n};Z)$, genau wenn

$\sum a_i \equiv \pm \sum b_i \ (n+1)$.

Beim Beweis der nächsten Sätze werden einige mit der "Aufspaltungsmethode" zusammenhängende Tatsachen benutzt, die im folgenden zusammengestellt sind. ([2] §§ 6,7,15; [18] § 13) Es sei ξ ein holomorphes Vektorraumbündel mit Faser C^{n+1} über der komplexen Mannigfaltigkeit Y , $E_\xi \longrightarrow Y$ das assoziierte $GL(n+1,C)$-Prinzipalbündel. $X := E_\xi / GL(1,n;C)$ ist ein holomorphes Faserbündel $(X,\pi,Y;P_n)$ mit Faser P_n . τ_X bzw. τ_Y sei das komplexe kontravariante Tangentialbündel von X bzw. Y , τ_f das (komplexe) Bündel entlang den Fasern. Die Beschränkung von τ_f auf eine Faser ist das kontravariante Tangentialbündel von P_n . Die Strukturgruppe von $\pi^*\xi$ kann in natürlicher Weise auf $GL(1,n;C)$ reduziert werden ([18] 3.4.4). $\pi^*\xi$ hat also in natürlicher Weise ein holomorphes Geradenbündel η als Teilbündel. η induziert auf jeder Faser P_n von (X,π,Y) das Hopfsche Geradenbündel ζ .

Beim Beweis der folgenden Sätze benötigen wir:

Lemma 4.2.3.

Es gibt die folgenden exakten Sequenzen:

(I) $$0 \longrightarrow \tau_f \longrightarrow \tau_X \longrightarrow \pi^*\tau_Y \longrightarrow 0$$

(II) $$0 \longrightarrow \eta \longrightarrow \pi^*\xi \longrightarrow \eta \otimes \tau_f \longrightarrow 0$$

Hieraus ergibt sich sofort mit $Y := P_1$, $\xi = \zeta^{a_0} \oplus \ldots \oplus \zeta^{a_n}$, $X = \Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$:

Satz 4.2.4.

Für $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ seien $\varepsilon, \nu \in H^2(\Sigma, Z)$ wie in 4.2.1 definiert.

i) Für die totale Chernsche Klasse gilt

$$c(\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}) = (1+\nu)^2 \prod_{i=0}^{n} (1+\varepsilon - a_i\nu)$$

ii) Die Chernschen Zahlen sind für alle $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ gleicher Dimension dieselben.

iii) Es sei $\sum a_i = r(n+1) + q$, $0 \leq q \leq n$. Bezüglich $\varepsilon' = \varepsilon - r\nu$, $\nu' = \nu$ gilt:

$$c(\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}) = (1+\nu')^2(1+\varepsilon')^n(1+\varepsilon' - q\nu')$$

$$c_1(\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}) = (n+1)\varepsilon' + (2-q)\nu' .$$

Bemerkung: Der Ausdruck in iii) stimmt genau mit dem für $c(\Sigma_{0,\ldots,0,q})$ bzgl. der Basis von 4.2.1 überein.

Beweis: Nach 4.2.3 (II) hat man eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \eta^{-1} \otimes \pi^*\xi \longrightarrow \tau_f \longrightarrow 0$$

Also $c(\tau_f) = c(\eta^{-1} \otimes \pi^*\xi) = c(\eta^{-1} \otimes (\pi^*\zeta^{a_0} \oplus \ldots \oplus \pi^*\zeta^{a_n}))$,

also nach [18] 4.4.3 $c(\tau_f) = \prod_{i=0}^{n} (1 - c_1(\eta) + \pi^* c_1(\zeta^{a_i}))$.

Bestimmung von $c_1(\eta)$: Ist $i : P_n \to \Sigma$ die Injektion einer Faser, $g \in H^2(P_n, Z)$ das positive erzeugende Element, so gilt: $i^*(\alpha\varepsilon + \beta\nu) = \alpha g$ und $i^* c_1(\eta) = c_1(i^*\eta) = -g$, also

$c_1(\eta) = -\varepsilon + \beta\nu$. Es ist $\beta = 0$. Denn es ist $c(\tau_f) = \prod_{i=0}^{n} (1+\varepsilon-(a_i+\beta)\nu)$ und wegen Rang $\tau_f = n$ gilt $0 = c_{n+1}(\tau_f) = \varepsilon^{n+1} - (\sum a_i + \beta(n+1))\varepsilon^n\nu = \beta(n+1)\varepsilon^n\nu$, mithin $\beta = 0$. Also ergibt sich $c(\tau_f) = \prod_{i=0}^{n}(1+\varepsilon-a_i\nu)$, womit wegen 4.2.3 (I) die Behauptung i) bewiesen ist. ii) und iii) folgen aus i) durch triviale Rechnung.

Satz 4.2.5.

Es sei ξ ein holomorphes Geradenbündel über $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ mit $c_1(\xi) = k_1\varepsilon + k_2\nu$. Dann gilt:

$$\chi(\Sigma_{a_1,\ldots,a_n};\xi) = \binom{n+k_1}{n}(1+k_2) + \sum a_i \binom{n+k_1}{n+1}$$

Beweis: Man wendet den Satz von Riemann-Roch an. Die einzelnen Rechenschritte werden im Anschluß an die Rechnung erläutert. Zur Abkürzung werde gesetzt $Q(x) := x(1-e^{-x})^{-1}$, $Q'(x) = \frac{d}{dx}Q(x) = x^{-1}Q(x) - x^{-1}e^{-x}(Q(x))^2$.

$$\chi(\Sigma;\xi) \overset{1.}{=} \left(e^{k_1\varepsilon+k_2\nu} Q(2\nu) \prod_{i=0}^{n} Q(\varepsilon-a_i\nu)\right)[\Sigma]$$

$$\overset{2.}{=} \left(e^{k_1\varepsilon}(1+(1+k_2)\nu)\prod_{i=0}^{n} Q(\varepsilon-a_i\nu)\right)[\Sigma]$$

$$\overset{3.}{=} (1+k_2)\left(e^{k_1\varepsilon}\nu\prod_{i=0}^{n} Q(\varepsilon)\right)[\Sigma] + \left(e^{k_1\varepsilon}\prod_{i=0}^{n} Q(\varepsilon-a_i\nu)\right)[\Sigma]$$

$$\overset{4.}{=} \binom{n+k_1}{n}(1+k_2) + \left(e^{k_1\varepsilon}\prod_{i=0}^{n}(Q(\varepsilon)-Q'(\varepsilon)a_i\nu)\right)[\Sigma]$$

$$\overset{5.}{=} \binom{n+k_1}{n}(1+k_2) + \sum_{i=0}^{n} a_i \text{ coeff. } x^{n+1} \text{ in } e^{k_1x}(Q(x))^{n+1}$$

$$-\sum_{i=0}^{n} a_i \text{ coeff. } x^{n} \text{ in } e^{k_1x}(Q(x))^{n}Q'(x)$$

6.
$$= \binom{n+k_1}{n}(1+k_2) + \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \text{coeff } x^{n+1} \text{ in } e^{(k_1-1)x}(Q(x))^{n+2}$$

7.
$$= \binom{n+k_1}{n}(1+k_2) + \sum_{i=0}^{n} a_i \binom{n+k_1}{n+1}$$

Erläuterungen:

1. Dies folgt aus 2.1 i), ii) und 2.1.5.
2. Dies folgt aus $\nu^2 = 0$ und $Q(x) = 1 + \frac{x}{2} + \dots$
3. Wegen $\nu^2 = 0$ brauchen höhere Potenzen von ν nicht berücksichtigt zu werden.
4. Der erste Term ist $(1+k_2)$ coeff. x^n in $e^{k_1 x}(Q(x))^{n+1}$ = $(1+k_2)\ \chi(P_n, k_1 g)$. Die Berechnung von $\chi(P_n, k\cdot g) = \binom{n+k}{n}$ wird als bekannt vorausgesetzt.

   Der zweite Term ist wegen $\nu^2 = 0$ eine abgebrochene Taylorentwicklung.
5. Anwendung von 4.2.1.
6. Dies ergibt sich durch Einsetzen von $Q'(x) = x^{-1}(Q(x) - e^{-x}Q(x)^2)$
7. $\chi(P_{n+1}, (k-1)g) = \binom{n+k}{n+1}$.

Der Ausdruck für $\chi(\Sigma, \xi)$ ist bereits in [32] ohne den Satz von Riemann-Roch hergeleitet worden. Dort werden allgemeiner Bündel mit Faser P_n über kompakten Riemannschen Flächen betrachtet, ohne daß auf Klassifizierungs- oder Konstruktionsfragen eingegangen wird (abgesehen von trivialen Bündeln).
Eine Konstruktion, die alle Σ-Flächen liefert (und die sich sofort für Σ-Mannigfaltigkeiten verallgemeinern läßt), ist jedoch schon von Corrado Segre angegeben worden in "Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques", II. Partie, no.4, Math.Ann. 1889, Band XXXIV. (vgl. auch [43].)

Lemma 4.2.3 führt auch zu der folgenden Berechnung der Cohomologiegruppen $H^i(\Sigma, \Theta)$, die für die Theorie der Deformationen von Σ-Mannigfaltigkeiten wichtig ist (vgl. § 4.5).

Lemma 4.2.6.
Y sei eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, ξ ein holomorphes Vektorraumbündel über Y , $\pi : X \longrightarrow Y$ das Faserbündel der Geraden in den Fasern von ξ , η das in natürlicher Weise gegebene Teilbündel von $\pi^*\xi$ (siehe 4.2.3). Dann gilt

$$H^i(X, \pi^*\xi \otimes \eta^{-1}) \cong H^i(Y, \xi \otimes \xi^*) .$$

Beweis: Es sei $\mathcal{O}(\pi^*\xi \otimes \eta^{-1})$ die Garbe der Keime holomorpher Schnitte in $\pi^*\xi \otimes \eta^{-1}$. Es wird gezeigt werden, daß die Bildgarben $\pi_*^q(\mathcal{O}(\pi^*\xi \otimes \eta^{-1}))$ für $q > 0$ verschwinden. Daraus folgt $H^i(X, \pi^*\xi \otimes \eta^{-1}) \cong H^i(Y, \pi_*^o(\mathcal{O}(\pi^*\xi \otimes \eta^{-1})))$. (Ein direkter Beweis hierfür wird in [9] Satz 6 angegeben.) Ferner wird gezeigt werden, daß $\pi_*^o(\mathcal{O}(\pi^*\xi \otimes \eta^{-1}) \cong \mathcal{O}(\xi \otimes \xi^*)$, und damit ist dann 4.2.6 bewiesen.
Aus 4.2.3 II erhält man durch Dualisierung die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \eta^{-1} \otimes \tau_f^* \longrightarrow \pi^*\xi^* \longrightarrow \eta^{-1} \longrightarrow 0$$

und durch Tensorieren mit $\pi^*\xi$

$$0 \longrightarrow \pi^*\xi \otimes \eta^{-1} \otimes \tau_f^* \longrightarrow \pi^*(\xi \otimes \xi^*) \longrightarrow \pi^*\xi \otimes \eta^{-1} \longrightarrow 0$$

Zur Berechnung der q-ten Bildgarben betrachte man die Garbendaten $H^q(\pi^{-1}(U), \pi^*\xi \otimes \eta^{-1})$ über solchen offenen Steinschen Mannigfaltigkeiten $U \subset Y$, für die $\xi | U$ trivial ist, so daß es eine fasertreue biholomorphe Abbildung $h : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times P_n$ gibt. Ist $p : U \times P_n \longrightarrow P_n$ die Projektion, $j := p \cdot h$, λ das triviale Bündel $P_n \times C^{n+1}$, ζ das

Hopfsche Geradenbündel über P_n und τ das kontravariante Tangentialbündel, so gilt:

$$\pi^*\xi \otimes \eta^{-1} \otimes \tau_f^*|\pi^{-1}(U) \cong j^*(\lambda \otimes \zeta^{-1} \otimes \tau^*) .$$

Hieraus folgt nach einem "Künnethschen Satz" (siehe z.B. [5] 11.1 oder [3] p.104)

$$H^q(\pi^{-1}(U), \pi^*\xi \otimes \eta^{-1} \otimes \tau_f^*) \cong H^o(U, \mathcal{O}_U) \otimes H^q(P_n, \lambda \otimes \zeta^{-1} \otimes \tau^*)$$

Nun ist aber

$$H^q(P_n, \lambda \otimes \zeta^{-1} \otimes \tau^*) \cong \bigoplus_{i=1}^{n+1} H^q(P_n, \zeta^{-1} \otimes \tau^*) = 0$$

nach Bott [5] Proposition 14.4.

Durch Beschränkung der obigen exakten Sequenz auf $\pi^{-1}(U)$ erhält man damit aus der zugehörigen exakten Cohomologiesequenz $H^q(\pi^{-1}(U), \pi^*\xi \otimes \eta^{-1}) \cong H^q(\pi^{-1}(U), \pi^*(\xi \otimes \xi^*))$

Da $\pi^*(\xi \otimes \xi^*)$ trivial über $\pi^{-1}(U)$ ist, folgt hieraus wieder nach dem Künnethschen Satz wegen $h^{o,q}(P_n) = 0$ für $q > 0$ $H^q(\pi^{-1}(U), \pi^*\xi \otimes \eta^{-1}) = 0$.

Für $q = 0$ ergibt sich

$$H^o(\pi^{-1}(U), \pi^*\xi \otimes \eta^{-1}) = H^o(\pi^{-1}(U), \pi^*(\xi \otimes \xi^*)) = H^o(U, \xi \otimes \xi^*)$$

(siehe hierzu [18] p.174). Damit ist aber bewiesen

$$\pi_*^o(\mathcal{O}(\pi^*\xi \otimes \eta^{-1}) = \mathcal{O}(\xi \otimes \xi^*) .$$

Aus der Tatsache, daß die Chernschen Zahlen für alle Σ-Mannigfaltigkeiten die gleichen sind (4.2.4), ergibt sich $\chi(\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}; \Theta) = (n+1)^2+2 = \chi(P_1 \times P_n, \Theta)$.

Die Gruppen $H^q(\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}; \Theta)$ lassen sich genau berechnen. Das Resultat ist:

Satz 4.2.7.

Θ sei die Garbe der Keime holomorpher Schnitte im kontravarianten Tangentialbündel von $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$. Es gilt (mit $a_o = 0$):

i) $H^o(\Sigma_{a_1,\ldots,a_n};\Theta) = \sum\limits_{\substack{a_j \geq a_i \\ 0 \leq i,j \leq n}}' (a_j - a_i + 1) + 2$

ii) $H^1(\Sigma_{a_1,\ldots,a_n};\Theta) = \sum\limits_{\substack{a_j > a_i \\ 0 \leq i,j \leq n}} (a_j - a_i - 1)$

iii) $H^q(\Sigma_{a_1,\ldots,a_n};\Theta) = 0$ für $q > 1$.

Beweis: Mit $\xi = \zeta^{a_o} \oplus \ldots \oplus \zeta^{a_n}$ gilt

$$H^o(P_1, \xi \otimes \xi^*) = \sum_{a_j \geq a_i} (a_j - a_i + 1)$$

$$H^1(P_1, \xi \otimes \xi^*) = \sum_{a_j > a_i} (a_j - a_i - 1)$$

$$H^q(P_1, \xi \otimes \xi^*) = 0 \quad \text{für } q > 1.$$

Die zu $0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \pi^*\xi \otimes \eta^{-1} \longrightarrow \tau_f \longrightarrow 0$ gehörige exakte Cohomologiesequnez liefert zusammen mit 4.2.6 wegen $h^{o,o}(\Sigma) = 1$, $h^{o,q}(\Sigma) = 0$ für $q > 0$:

$$\dim H^o(\Sigma, \tau_f) = \dim H^o(P_1, \xi \otimes \xi^*) - 1$$

$$\dim H^q(\Sigma, \tau_f) = \dim H^q(P_1, \xi \otimes \xi^*) \quad \text{für } q > 1.$$

Die zu $0 \longrightarrow \tau_f \longrightarrow \tau_\Sigma \longrightarrow \pi^*\tau_{P_1} \longrightarrow 0$ gehörige exakte Cohomologiesequnez liefert dann zusammen mit $H^i(\Sigma, \pi^*\tau_{P_1}) = H^i(P_1, \tau_{P_1})$, $\dim H^o(P_1, \tau_{P_1}) = 3$, $\dim H^q(P_1, \tau_{P_1}) = 0$ für $q > 0$ und mit Satz 4.1.10 das Resultat, wenn man noch berücksichtigt, daß für eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit X $H^o(X, \Theta)$ in natürlicher Weise isomorph ist zur Liealgebra der Automorphismengruppe von X (siehe z.B. [23], Satz 1).

4.3. Differentialtopologische, analytische und birationale Klassifizierung

Satz 4.3.1.

i) $\Sigma_{a_1,\dots,a_n}$ und $\Sigma_{b_1,\dots,b_n}$ sind biholomorph äquivalent, genau wenn $a_i = b_i$, $i = 1,\dots,n$

ii) $\Sigma_{a_1,\dots,a_n}$ und $\Sigma_{b_1,\dots,b_n}$ sind zueinander diffeomorph, genau wenn $\Sigma a_i \pm \Sigma b_i \equiv 0(n+1)$.
$\Sigma_{a_1,\dots,a_n}$ und $\Sigma_{b_1,\dots,b_n}$ sind genau dann orientierungstreu diffeomorph, wenn entweder $\Sigma a_i - \Sigma b_i \equiv 0(n+1)$ oder wenn n gerade und $\Sigma a_i + \Sigma b_i \equiv 0(n+1)$.
Σ-Mannigfaltigkeiten, die nicht zueinander diffeomorph sind, sind von verschiedenem Homotopietyp. (Vgl. jedoch §4.2)

iii) Ist n gerade, $\Sigma a_i + \Sigma b_i \equiv 0(n+1)$, $\Sigma a_i \not\equiv 0(n+1)$, dann sind also $\Sigma_{a_1,\dots,a_n}$, $\Sigma_{b_1,\dots,b_n}$ orientierungstreu diffeomorphe Mannigfaltigkeiten mit gleichen Chernschen Zahlen, aber wesentlich verschiedenen Chernschen Klassen.

iv) Alle $\Sigma_{a_1,\dots,a_n}$ sind birational äquivalent zum projektiven Raum P_{n+1}, aus dem sie sich durch abwechselnde Anwendung von σ-Prozessen und inversen σ-Prozessen erzeugen lassen.

Zum Beweis: i) wurde bereits früher bewiesen und hier nur der Vollständigkeit wegen aufgeführt (vgl. 4.1.8. iii)) .
ii) Zunächst werden die Σ-Mannigfaltigkeiten als stetige bzw. differenzierbare P_n-Bündel über P_1 mit Strukturgruppe $PGL(n,C)$ klassifiziert.
Die stetigen Bündel über P_1 mit zusammenhängender Strukturgruppe G werden bekanntlich durch $\pi_1(G)$ klassifiziert. ([41] 18.5). Also ist $H^1(P_1,G_c) \cong \pi_1(G)$.

Es ist $\pi_1(GL(n+1, C)) \cong Z$, wie sich aus $\pi_1(SU(m)) = 0$ für $m \geq 1$ und aus den folgenden beiden Homöomorphismen ergibt.

$GL(m,C) \approx U(m) \times R^{m^2}$ (+)

$U(m) \approx S^1 \times SU(m)$ (++) (vgl. [6] I § V, prop. 3 und II, § XI, Prop. 6.7)

Für $U(1) \times \ldots \times U(1)$ (m mal) ist die Zerlegung in die Faktoren des zweiten Homöomorphismus gegeben durch

$$\begin{pmatrix} e^{ic_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{ic_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu} & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\sum_{\nu=2}^{n} c_\nu} & & & 0 \\ & e^{ic_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{ic_n} \end{pmatrix}$$

Es gilt also $H^1(P_1, (U(1) \times \ldots \times U(1))_c) \cong H^1(P_1, GL(m,C)_c)$ $\cong \pi_1(GL(m,C)) \cong Z$, und der Isomorphismus $H^1(P_1, GL(m,C)_c) \cong Z$ ordnet einem Bündel mit der transition-function

$$g_{1,0}(z) = \begin{pmatrix} z^{c_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z^{c_m} \end{pmatrix}$$

oder mit der charakteristischen Abbildung des Äquators, die gegeben wird durch

$$\begin{pmatrix} e^{ic_1\varphi} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{ic_m\varphi} \end{pmatrix}$$

die Zahl $\sum_{j=1}^{m} c_j$ zu.

Damit sind die stetigen Vektorbündel über P_1 klassifiziert. Um die zugehörigen P_n-Bündel zu klassifizieren, betrachtet man die zu der Faserung $GL(n+1,C) \longrightarrow PGL(n,C)$ mit der Faser C^* gehörige exakte Homotopiesequenz

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & \pi_1(C^*) & \longrightarrow & \pi_1(GL(n+1)) & \longrightarrow & \pi_1(PGL(n)) & \longrightarrow & \pi_0(C^*) \\
 & \cong & & \cong & & \cong & & \| \\
\longrightarrow & Z & \xrightarrow{\cdot(n+1)} & Z & \longrightarrow & Z_{n+1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Die Abbildung $\pi_1(C^*) \longrightarrow \pi_1(GL(n+1,C))$ entspricht der Multiplikation mit $(n+1)$, wie aus dem gerade über den Isomorphismus $H^1(P_1,GL(m,C)_c) \cong Z$ gesagten hervorgeht. Hieraus folgt:

Lemma 4.3.2.

i) $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$, $\Sigma_{b_1,\ldots,b_n}$ sind als stetige Bündel mit Strukturgruppe $PGL(n,C)$ isomorph, genau wenn $\sum a_i \equiv \sum b_i (n+1)$.

ii) Sie sind auch als differenzierbare Bündel mit Strukturgruppe $PGL(n,C)$ isomorph, genau wenn $\sum a_i \equiv \sum b_i (n+1)$.

Zum Beweis von ii): Man hat das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1(P_1,C^*_d) & \longrightarrow & H^1(P_1,GL(n+1)_d) & \longrightarrow & H^1(P_1,PGL(n)_d) & \longrightarrow & H^2(P_1,C^*_d) \\
\downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_4 \\
H^1(P_1,C^*_c) & \longrightarrow & H^1(P_1,GL(n+1)_c) & \longrightarrow & H^1(P_1,PGL(n)_c) & \longrightarrow & H^2(P_1,C^*_c)
\end{array}$$

Aus [18] § 4.1.b folgt, daß h_1,h_2 bijektiv sind. Ferner ist $H^2(P_1,C^*_d) = H^2(P_1,C^*_c) = 0$ wegen $H^3(P_1,Z) = 0$ (vgl. [18] § 3.8.). Also ist h_3 bijektiv, was wegen des Klassifikationssatzes [18] 3.2.1 die Aussage ii) ergibt.

Mit Lemma 4.3.2 ist der Teil von 4.3.1 ii) bewiesen, der sich auf den Fall $\sum a_i \equiv \sum b_i (n+1)$ bezieht, da ein Isomorphismus von differenzierbaren $PGL(n,C)$-Bündeln natürlich ein orientierungstreuer Diffeomorphismus ist.

Bemerkung zur Orientierungstreue: Der für $P_1 \times P_{2n}$ durch $(y_o,y_1;x_o,\ldots,x_{2n}) \longrightarrow (\bar{y}_o,\bar{y}_1;\bar{x}_o,\ldots,\bar{x}_{2n})$ definierte Diffeomorphismus induziert einen Diffeomorphismus f von $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n} \subset P_1 \times P_{2n}$ auf sich mit $f^*\varepsilon = -\varepsilon$, $f^*\nu = -\nu$. f erhält die Orientierung, falls n ungerade, und kehrt sie um, falls n gerade. Ähnlich wie in dem Beweis von 2.2.3 zeigt man, daß für n ungerade jeder Diffeomorphismus von $\sum_{a_1,\dots,a_n}$ auf sich orientierungstreu ist, außer wenn $2\sum a_i \equiv 0(n+1)$. In diesem Fall existiert ein die Orientierung umkehrender Diffeomorphismus von $\sum_{a_1,\dots,a_n}$ auf sich (s.u.).

Der Fall $\sum a_i + \sum b_i \equiv 0(n+1)$: Es seien y_o, y_1 homogene Koordinaten auf P_1, $U_i := \{ (y_o,y_1) \in P_1, y_i \neq 0 \}$, $z := y_o^{-1} y_1$. Für die Punkte des Äquators ist $z = e^{i\varphi}$. Man betrachte das Bündel $\sum_{a_1,\dots,a_n}$ mit der transition-function

$$g_{1,0}(z) = \begin{pmatrix} z^{a_o} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z^{a_n} \end{pmatrix}$$

und das differenzierbare P_n-Bündel $\overline{\sum}$ mit Strukturgruppe $PGL(n,C)$, das durch die transition-function

$$\overline{g}_{1,0}(z) = \begin{pmatrix} \overline{z}^{a_o} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{z}^{a_n} \end{pmatrix}$$

gegeben wird. $p: \sum \longrightarrow P_1$ bzw. $\overline{p}: \overline{\sum} \longrightarrow P_1$ bezeichne die Bündelprojektionsabbildungen. Es seien

$(y_o,y_1;\ x_o,\dots,x_n)$ bzw. $(y_o,y_1;\ x'_o,\dots,x'_n)$ bzw.

$(y_o,y_1;\ w_o,\dots,w_n)$ bzw. $(y_o,y_1;\ w'_o,\dots,w'_n)$

bihomogene Koordinaten für $p^{-1}(U_o)$ bzw. $p^{-1}(U_1)$ bzw. $\overline{p}^{-1}(U_o)$ bzw. $\overline{p}^{-1}(U_1)$, so daß über $U_o \cap U_1$ $x'_i = z^{a_i} x_i$ und $w'_i = \overline{z}^{a_i} w_i$ gilt. Dann wird durch $w_i(x) := \overline{x}_i$ bzw. $w'_i(x') = \overline{x}'_i$ offenbar ein (fasertreuer) Diffeomorphismus $\sum \approx \overline{\sum}$ definiert. Dieser ist orientierungsumkehrend für ungerades n. Die charakteristische Abbildung des Äquators von P_1 ist für $\overline{\sum}$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} e^{-ia_o\varphi} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{-ia_n\varphi} \end{pmatrix}$$

Das heißt aber nach dem Vorhergehenden, daß $\overline{\sum}$ orientierungstreu diffeomorph ist zu allen $\sum_{b_1,\dots,b_n}$ mit

$\sum b_i + \sum a_i \equiv 0(n+1)$, woraus sich mit $\sum \approx \overline{\sum}$ 4.3.1 ii) ergibt.
Daß für $\sum a_i \pm \sum b_i \not\equiv 0(n+1)$ $\sum_{a_1,\ldots,a_n}$ und $\sum_{b_1,\ldots,b_n}$ verschiedenen Homotopietyp haben, folgt trivialerweise daraus, daß dann schon die Cohomologieringe verschieden sind (4.2.2 iii)).

Bemerkung: Daß für ungerades n und $\sum a_i + \sum b_i \equiv 0(n+1)$ $\sum a_i - \sum b_i \not\equiv 0(n+1)$ $\sum_{a_1,\ldots,a_n}$ und $\sum_{b_1,\ldots,b_n}$ nicht orientierungstreu diffeomorph sind, hätte man auch mit Hilfe von 2.1.6, 4.2.2, 4.2.4 und 4.2.5 ohne Kenntnis des orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus $\sum_{a_1,\ldots,a_n} \approx \sum_{b_1,\ldots,b_n}$ beweisen können.

iii) Daß die Chernschen Klassen wesentlich verschieden sind, heißt, daß es keinen orientierungstreuen Diffeomorphismus der beiden Mannigfaltigkeiten gibt, der die Chernschen Klassen ineinander überführt. Dies folgt aus 4.2.2 und 4.2.4.

iv) Die Behauptung ergibt sich aus der folgenden genaueren Aussage:

Es sei $0 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_s < a_{s+1} \leqslant \ldots \leqslant a_n$.
$\sum_{a_1,\ldots,a_n}$ bzw. $\sum_{a_1,\ldots,a_{s-1},a_s+1,a_{s+1},\ldots,a_n}$ seien wie in 4.1.9 in $P_1 \times P_{2n}$ bzw. $P_1' \times P_{2n}'$ eingebettet, $(y_0,y_1;\ x_0,\ldots,x_{2n})$ bzw. $(y_0',y_1';\ x_0',\ldots,x_{2n}')$ seien bihomogene Koordinaten. Dann gilt:

Satz 4.3.3.
Die in $\sum_{a_1,\ldots,a_n} \times \sum_{a_1,\ldots,a_s+1,\ldots,a_n} \subset P_1 \times P_{2n} \times P_1' \times P_{2n}'$ durch die Gleichungen

$$x_i' x_j - x_j' x_i = 0 \qquad i,j \neq 2s-1$$

$$x_{2s-1}' y_0 x_j - x_j' y_1 x_{2s-1} = 0 \qquad j \neq 2s-1$$

$$y_0' y_1 - y_1' y_0 = 0$$

definierte algebraische Mannigfaltigkeit G ist der Graph einer birationalen Abbildung $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n} \longrightarrow \Sigma_{a_1,\ldots,a_s+1,\ldots,a_n}$.
G entsteht aus $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ durch monoidale Dilatation längs der durch $y_o = 0$, $x_{2s-1} = 0$ gegebenen Untermannigfaltigkeit und aus $\Sigma_{a_1,\ldots,a_s+1,\ldots,a_n}$ durch σ-Prozeß im Punkt $y_o' = 0$, $x_i' = 0$ für $i \neq 0$.

(Zum σ-Prozeß vgl. [30])
Beweis: In 4.3.1 iv) wurde behauptet, daß alle $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ sich aus P_{n+1} erzeugen lassen. 4.3.3 zeigt, daß alle $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ durch endlich viele σ-Prozesse und inverse σ-Prozesse aus $P_1 \times P_n$ erzeugbar sind. Daraus folgt 4.3.1 iv), weil in [30] Satz 13 gezeigt wird, daß man eine gemeinsame σ-Modifikation von $P_1 \times P_n$ und P_{n+1} erhält, wenn man einmal für $P_1 \times P_n$ in einer Untermannigfaltigkeit $\{\text{Punkt}\} \times P_{n-1}$ den σ-Prozeß durchführt und zum andern für P_{n+1} zwei σ-Prozesse: in einem P_{n-1} und einem darin nicht enthaltenen Punkt.

Aus 4.3.3 geht insbesondere hervor, daß alle Σ-Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension verwandte komplexe Räume im Sinne von Remmert [34] Def. 10 sind. Ferner sind die trivialen Bündel $\Sigma_{o,\ldots,o}$ als homogene Mannigfaltigkeiten komplexe Urräume, d.h. solche, die nicht durch eine eigentliche wesentliche Modifikation aus einem anderen komplexen Raum entstehen können. ([34] Satz 16). Unter den Σ-Mannigfaltigkeiten sind die $\Sigma_{o,\ldots,o}$ auch die einzigen komplexen Urräume. Für die Σ_m-Flächen ist das schon deswegen klar, weil auf Σ_m für $m > 0$ eine Kurve vom Selbstschnitt $-m$ existiert, und eine solche nach [12] 8.e exceptionell ist.
Allgemein kann man die Richtigkeit der obigen Behauptung durch Verallgemeinerung einer in [15] 4.1 benutzten Methode ein-

sehen: $\Sigma_{a_1,\dots,a_n}$ ist nach 4.1.9 in einen $P_1 \times P_{2n}$ eingebettet. Bettet man $P_1 \times P_{2n}$ als Segre-Mannigfaltigkeit in P_{4n+1} ein und projiziert anschließend auf einen geeigneten P_{2n+1}, so erhält man eine eigentliche wesentliche Modifikationsabbildung

$$\tau : \Sigma_{a_1,\dots,a_n} \longrightarrow \tilde{\Sigma}_{a_1,\dots,a_n} .$$

Genauer: $\Sigma_{a_1,\dots,a_n}$ ist in $P_1 \times P_{2n}$ durch $y_o^{a_i} x_{2i-1} - y_1^{a_i} x_{2i} = 0$ gegeben. Es seien $(z_o,\dots,z_{2n+1})$ homogene Koordinaten für P_{2n+1}, $\tilde{\Sigma}_{a_1,\dots,a_n}$ die durch

$$z_{2k}^{a_i+1} z_{2i+1}^{a_k+1} - z_{2k+1}^{a_i+1} z_{2i}^{a_k+1} = 0 \qquad k,i=0,\dots,n \quad ; \; a_o = 0$$

gegebene Untervarietät von P_{2n+1}.

$N \subset \Sigma_{a_1,\dots,a_n}$ sei die durch $z_o = 0$, $z_1 = 0$ definierte Untervarietät von $\tilde{\Sigma}$, ebenso sei N die durch $x_o = 0$ gegebene Untermannigfaltigkeit von Σ. Durch

$$z_o = y_o x_o \qquad\qquad z_{2i} = y_o x_{2i}$$

$$z_1 = y_1 x_o \qquad\qquad z_{2i+1} = y_1 x_{2i-1}$$

wird eine holomorphe eigentliche Abbildung $\tau : (\Sigma, N) \rightarrow (\tilde{\Sigma}, \tilde{N})$ definiert. $\tau : \Sigma - N \longrightarrow \tilde{\Sigma} - \tilde{N}$ ist biholomorph, aber $\tau : N \rightarrow \tilde{N}$ ist offenbar nicht injektiv außer im Fall $\Sigma_{o,\dots,o}$. Ersetzt man $N, \tilde{N}$ durch geeignete Mengen $N, \tilde{N}$, so erhält man eine eigentliche wesentliche Modifikation $(\Sigma, \mathring{N}, \tau, \mathring{\tilde{N}}, \tilde{\Sigma})$ (siehe [35], Satz 4). Damit ist also bewiesen:

Satz 4.3.4.

Alle Σ-Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension sind verwandt. Die einzigen komplexen Urräume unter ihnen sind die trivialen Bündel $\Sigma_{o,\dots,o}$.

4.4. Komplexe Struktur und Diffeomorphietyp

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit der Frage, welche algebraische Mannigfaltigkeiten diffeomorph sind zu einer Σ-Mannigfaltigkeit. Es zeigt sich, daß eine solche Mannigfaltigkeit, falls sie noch einer gewissen weiteren Bedingung genügt, schon eine Σ-Mannigfaltigkeit ist.

Es sei also X_{n+1} eine zu $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ diffeomorphe Kählersche Mannigfaltigkeit.

Für das Folgende sind einige Bemerkungen zur Wahl einer Cohomologiebasis in $H^2(X_{n+1},Z)$ notwendig.
Unter einer ausgezeichneten Basis soll eine s-Basis $(0 \leqslant s \leqslant n+1)$ $\{\varepsilon',\nu'\}$ von $H^2(X,Z)$ mit $\varepsilon'^n\nu'\,[X] > 0$ verstanden werden.
Es sei $\sum a_i \equiv q(n+1) \quad 0 \leqslant q \leqslant n$.
Für n gerade kann man, wie es im folgenden stets geschieht, wegen der Existenz eines die Orientierung umkehrenden Diffeomorphismus von $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ auf sich annehmen, daß X orientierungstreu diffeomorph zu $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ ist. Unter den zwei q-Basen von X (bzw. von Σ) ist eine ausgezeichnet (vgl. 4.2.2). Entsprechendes gilt für die $(n+1-q)$-Basen. Für den Übergang von der ausgezeichneten q-Basis $\{\varepsilon',\nu'\}$ zur ausgezeichneten $(n+1-q)$-Basis $\{\varepsilon'',\nu''\}$ gilt:
$\varepsilon'' = -\varepsilon' + \nu' \quad \nu'' = \nu'$. Ist $f : X \longrightarrow \Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ ein orientierungstreuer Diffeomorphismus, $\{\varepsilon,\nu\}$ die ausgezeichnete q-Basis von Σ, so gilt $f^*(\varepsilon) = \varepsilon'$, $f^*(\nu) = \nu'$.

Für ungerades n genügt es wegen Satz 4.3.1 ebenfalls, orientierungstreue Diffeomorphismen zu betrachten, denn wenn X zu $\Sigma_{0,\ldots,0,q}$ diffeomorph ist unter Umkehrung der Orientierung, so ist X zu $\Sigma_{0,\ldots,0,n+1-q}$ orientierungstreu diffeomorph.

Auch hier gibt es im Fall $n > 1$ genau zwei ausgezeichnete Basen.

Dies sind beides entweder q- oder (n+1-q)-Basen, die sich nur durch ein gemeinsames Vorzeichen unterscheiden. Im Fall n=1 gibt es 4 ausgezeichnete Basen. Ein orientierungstreuer Diffeomorphismus überführt ausgezeichnete Basen in einander, ein orientierungsumkehrender nicht.

Bei Anwendung der in § 2 entwickelten Methode auf die Σ-Mannigfaltigkeiten erhält man unter Benutzung von 4.2.2, 4.2.4, 4.2.5

Lemma 4.4.1.

X sei eine Kählersche Mannigfaltigkeit und $f : X \longrightarrow \Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ ein Diffeomorphismus, $\sum a_i \equiv q(n+1)$, $0 \leqslant q \leqslant n$.
$c_1(X)$ bezeichne die erste Chernsche Klasse von X . Es sei

i) n gerade

$\{\varepsilon,\nu\}$ bzw. $\{\varepsilon',\nu'\}$ bezeichne die ausgezeichnete q-Basis bzw. (n+1-q)-Basis.

Ist $q \neq 1$, $q \neq n$, so gilt

(1) $c_1(X) = (n+1)\,\varepsilon + (2-q)\,\nu$ oder
(2) $c_1(X) = (n+1)\,\varepsilon' + (2-(n+1-q))\,\nu'$

Ist $q = 1$, so gilt die Gleichung (1) oder (2) oder

(3) $c_1(X) = (n+3)\,\varepsilon - \nu$

ii) n ungerade, f orientierungstreu

$\{\varepsilon,\nu\}$ sei eine der dann ausgezeichneten q-Basen.

Ist $q \neq 1$, so gilt

(4) $c_1(X) = \pm\,(\,(n+1)\,\varepsilon + (2-q)\nu\,)$

Ist $q = 1$, so gilt Gleichung (4) oder

(5) $c_1(X) = \pm\,(\,(n+3)\,\varepsilon - \nu\,)$.

Es ist nicht bekannt, ob man die Möglichkeiten (3) und (5) im vorstehenden Lemma für $n > 1$ ausschließen kann. Die Möglichkeiten (1) und (2) treten wirklich auf, das geht gerade aus Satz 4.3.1 hervor. Bei (4) kann man die Doppeldeutigkeit bzgl. des Vorzeichens natürlich nicht ausschließen, solange man keine weiteren Einschränkungen bzgl. der Basen macht. Das gleiche gilt für (5) im Fall $n=1$, wie man sofort aus 4.2.2 entnimmt.

Die eigentliche Schwierigkeit für den Beweis eines Satzes von dem Typ, daß eine zu einer Σ-Mannigfaltigkeit diffeomorphe algebraische Mannigfaltigkeit X eine Σ-Mannigfaltigkeit ist, besteht darin, daß man nicht weiß, welches die positiven Cohomologieklassen von $H^2(X,Z)$ sind. Für die Σ-Mannigfaltigkeiten hat man natürlich alle diesbezüglichen Informationen. Es gilt nämlich:

Lemma 4.4.2.

Es sei $\{\varepsilon, \nu\}$ die in 4.2.1 definierte Basis von $H^2(\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}, Z) \cong Z \oplus Z$. Dann gilt:

i) $a\varepsilon + b\nu$ ist positiv, genau wenn $a > 0; b > 0$.

ii) Jedes positive Bündel über Σ ist projektiv induziert.

Beweis: Sei $a > 0$, $b > 0$.

$h : P_1 \times P_{2n} \longrightarrow P_{\binom{2n+a}{a}\binom{1+b}{b}-1}$ sei die durch

$h(y_0,y_1;x_0,\ldots,x_{2n}) := (\ldots,x_0^{\alpha_0}\ldots x_{2n}^{\alpha_{2n}}\, y_0^{\beta_0}y_1^{\beta_1},\ldots)$

mit Hilfe aller Monome vom Bigrad $(\sum \alpha_i, \sum \beta_k) = (a,b)$ definierte bireguläre Einbettung. $j : \Sigma_{a_1,\ldots,a_n} \longrightarrow P_1 \times P_{2n}$ sei die in 4.1.9 definierte Einbettung. Ist η das zu einem Hyperebenenschnitt von $P_{\binom{2n+a}{a}\binom{1+b}{b}-1}$ gehörige Geradenbündel, so ist $j^*h^*\eta$ natürlich projektiv induziert und es gilt $c_1(j^*h^*\eta) = j^*h^*(c_1(\eta)) = a\varepsilon + b\nu$, womit bewiesen ist, daß alle $a\varepsilon + b\nu$ mit $a>0$, $b>0$ projektiv induziert sind.

Sei nun $a\varepsilon + b\nu$ positiv. Wäre $a \leqslant 0$, so wäre, da es positive $a'\varepsilon + b'\nu$ mit $a' > 0$ gibt, auch ν positiv ([18] 18.1), was mit $\nu^2 = 0$ unverträglich ist (1.2.2). Daß auch $b' > 0$ gilt, folgt z.B. daraus, daß es einen effektiven Zykel mit der Cohomologieklasse $\varepsilon^n - \sum a_i \varepsilon^{n-1}\nu$ gibt. (§ 4.2, Bemerkung 1.) Wegen 1.2.2 gilt nämlich $(a\varepsilon + b\nu)\cup(\varepsilon^n - \sum a_i \varepsilon^{n-1}\nu)[\Sigma] > 0$.

Bemerkung: Führt man für jedes $\Sigma_{a_1,\dots,a_n}$ mit $\sum a_i = r(n+1) + q$, $0 \leqslant q \leqslant n$, nach 4.2.2 i) die ausgezeichnete q-Basis $\{\varepsilon',\nu'\}$ ein, so ergibt Lemma 4.4.2:

$a\varepsilon' + b\nu'$ ist positiv, genau wenn $a > 0$ und $b > ra$. Insbesondere existiert also für jedes $\Sigma_{a_1,\dots,a_n}$ ein projektiv induziertes Bündel ξ mit $c_1(\xi) = \varepsilon' + b\nu'$. Auf Grund dieser Tatsache ist die im folgenden Satz gemachte Voraussetzung über die Existenz eines gewissen projektiv induzierten Bündels naheliegend.

Satz 4.4.3.

X_{n+1} sei Kählersch und diffeomorph zu einer Σ-Mannigfaltigkeit.

$\{\varepsilon,\nu\}$ sei eine ausgezeichnete Basis von $H^2(X,Z)$, für welche gilt $c_1(X) = a_1\varepsilon + a_2\nu$ mit $a_1 > 0$. (Eine solche Basis existiert).

Es existiere ein projektiv induziertes Geradenbündel ξ auf X mit $c_1(\xi) = \varepsilon + b\nu$, $b \in Z$.

Dann ist X eine Σ-Mannigfaltigkeit.

Zusatz (Andreotti): Für n=1 gilt 4.4.3 mit der folgenden schwächeren Voraussetzung: Es existiere ein projektiv induziertes Geradenbündel ξ mit $c_1(\xi) = a\varepsilon + b\nu$ und $a > 0$.

Beweis: Falls $X = \Sigma_0$, ist nichts mehr zu beweisen. Dieser Fall wird im folgenden ausgeschlossen.

(a) $\{\varepsilon, \nu\}$ sei die im Satz genannte Basis, ξ projektiv induziert und $c_1(\xi) = \varepsilon + b\nu$. Behauptung: $b \geqslant 0$ und, falls $q = 0$ oder $q = 1$, $b > 0$. Beweis: ϕ_ξ sei die zu ξ gehörige Einbettung in einen projektiven Raum $\phi_\xi : X \longrightarrow P_N$. Da X weder eine Quadrik noch ein projektiver Raum ist, gilt Ordnung $\phi_\xi(X) > 2$, d.h.
$(\varepsilon + b\nu)^{n+1}[X] = q + (n+1)b > 2$. Daraus folgt trivialerweise die Behauptung.

(b) Die im Satz genannte Basis $\{\varepsilon, \nu\}$ sei eine q-Basis. Behauptung: $c_1(X) = (n+1)\varepsilon + (2-q)\nu$.
Beweis: Nach Lemma 4.4.1 zusammen mit 4.3.1 braucht lediglich der Fall $q = 1$, $c_1(X) = (n+3)\varepsilon - \nu$ ausgeschlossen zu werden. Dies geschieht durch Berechnung des (virtuellen) Geschlechtes einer Kurve, die auf $\phi_\xi(X)$ durch einen projektiven Teilraum geeigneter Dimension ausgeschnitten wird:
Es sei W_n eine Untervarietät von X_{n+1}, W^*_n ihre duale Cohomologieklasse, V_2 die von $(n-1)$ allgemeinen Hyperebenen von P_N auf $\phi_\xi(X)$ ausgeschnittene singularitätenfreie Fläche, C die Kurve $W_n \cap V_2$ mit der dualen Klasse $F \in H^2(V,Z)$, schließlich K die Klasse des kanonischen Divisors von V_2 und $i : V_2 \longrightarrow X_{n+1}$ die Inklusion. Dann ist (vgl. [29] p.120) $K = i^*(-c_1(X) + (n-1)c_1(\xi))$ und für das virtuelle Geschlecht gilt

$$\begin{aligned}\pi'(C) &= \frac{1}{2} F(F+K) \; [V_2] + 1 \\ &= \frac{1}{2} i^*(W^*(W^*-c_1(X) + (n-1)c_1(\xi))) \; [V_2] + 1 \\ &= \frac{1}{2} W^*(W^*-c_1(X)+(n-1)c_1(\xi)) \; (c_1(\xi))^{n-1} [X] + 1 .\end{aligned}$$

Speziell mit $W^* = c_1(\xi) = \varepsilon + b\nu$ und $c_1(X) = (n+3)\varepsilon - \nu$ würde folgen:

$$\begin{aligned}\pi'(C) &= \frac{1}{2} (- (n+3)\varepsilon + \nu + n(\varepsilon + b\nu)) \; (\varepsilon + b\nu)^n [X] + 1 \\ &= \frac{1}{2} (-3q - 2nb + 1) + 1 = - nb < 0 \qquad (\text{für } q=1) .\end{aligned}$$

Das ist nicht möglich, und damit ist die Annahme $c_1 = (n+3)\varepsilon - \nu$ zum Widerspruch geführt.

(c) Aus (b) folgt:

$$\chi(X, k_1 \varepsilon + k_2 \nu) = \binom{n+k_1}{n} (1+k_2) + q \cdot \binom{n+k_1}{n+1}$$

Für $n > 1$ folgt dies sofort aus 2.1.6 und (b) zusammen mit 4.2.2, für $n=1$ folgt es unmittelbar aus dem Satz von Riemann-Roch, da die Chernschen Klassen $c_1(X)$ und $c_2(X) = 4\varepsilon\nu$ dieselben sind wie bei den Σ-Flächen.

(d) Aus 1.1.3 folgt zusammen mit (a), (c), falls man setzt
$k := (n+1)b + q - 2$
$k > 0$, $\dim H^0(X, k\nu) = k + 1$.

(e) Behauptung : Jeder effektive Divisor D mit $c(D) = k\nu$ zerfällt in irreduzible Komponenten, die alle die duale Cohomologieklasse ν haben.

Beweis: Es sei W_n eine Untervarietät von X mit der dualen Cohomologieklasse $W^* = h_1 \varepsilon + h_2 \nu$. Genau wie in (b) berechnet man für das virtuelle Geschlecht einer Schnittkurve C von W mit einem geeigneten projektiven Teilraum von P_N:

$$\pi'(C) = \frac{1}{2}(h_1 - 1)(h_1(q+(n-1)b) + 2h_2 - 2)$$

Da C als Schnitt von W mit allgemeinen Hyperebenenschnitten irreduzibel ist, ist $\pi'(C) \geq 0$ (siehe z.B. [29] p.120). Daraus ergibt sich sofort, daß keine Untervarietät $W_n \subset X$ mit $W^* = h_2 \nu$, $h_2 > 1$ existieren kann. Ebenso existiert kein irreduzibles W_n mit $W^* = h_1 \varepsilon + h_2 \nu$ $h_1 < 0$. Denn aus $(n+1)b + q > 2$, $0 \leq q \leq n+1$, folgt $b \geq 0$ bzw. $b > 0$ für $q = 0$, also wäre wegen
$(h_1 \varepsilon + h_2 \nu)(\varepsilon + b\nu)^n [X] = h_1(q + nb) + h_2 > 0$,
$h_2 > 0$ für $h_1 < 0$, und aus diesen Ungleichungen ergäbe sich $(h_1(q + (n-1)b) + 2h_2 - 2) > 0$ für $h_1 < 0$, also wäre $\pi'(C) < 0$, womit bewiesen ist, daß keine Untervarietät W mit $W^* = h_1 \varepsilon + h_2 \nu$, $h_1 < 0$ oder $h_1 = 0$ und $h_2 \neq 1$ existiert. Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung (e).

(f) Aus (d) und (e) folgt sofort, daß die effektiven Divisoren D mit dualer Klasse $c(D) = \nu$ eine Vollschar $|D|$ ohne Fixkomponenten und Basispunkte bilden mit dim $|D| = 1$, also $|D| \approx P_1$, und daß für $D', D'' \in |D|$, $D' \neq D''$ gilt $D' \cap D'' = \emptyset$. Also ist die Abbildung $\phi_{\{D\}} : X \longrightarrow |D|$, die jedem $x \in X$ den einzigen Divisor $D' \in |D|$ mit $x \in D'$ zuordnet, eine holomorphe Abbildung von X auf P_1, deren Fasern gerade die Divisoren von $|D|$ sind. Nach 4.1.1 ist also dann der Satz 4.4.3 bewiesen, wenn gezeigt ist, daß jeder Divisor aus $|D|$ ein projektiver Raum P_n ist.

(g) Dies kann man folgendermaßen beweisen: Ein Satz von Kodaira besagt: Ist ξ projektiv induziert und $\{D\}$ das Bündel, das zu einem Divisor gehört, dessen Vollschar $|D|$ keine Fixkomponenten und keine Basispunkte hat, so ist auch $\eta := \xi \otimes \{D\}$ projektiv induziert. Anwendung auf die vorliegende Situation ergibt, daß es eine natürliche Zahl b_o gibt, so daß für $b > b_o$ die Klasse $\varepsilon + b\nu$ die erste Chernsche Klasse eines projektiv induzierten Bündels ist, und daher gilt nach 1.1.3 außerdem, daß eine natürliche Zahl b_1 gibt, so daß $\varepsilon + b_1\nu$ die erste Chernsche Klasse eines projektiv induzierten Bündels η ist und daß gilt

$$\chi(X, \varepsilon + b_1\nu) = \dim H^o(X, \eta)$$
$$\chi(X, \varepsilon + (b_1+1)\nu) = \dim H^o(X, \eta \otimes \{D\}) .$$

Wir betrachten die zu $\zeta := \eta \otimes \{D\}$ gehörige Einbettung ϕ_ζ von X in einen projektiven Raum P_N, $N = \dim H^o(X, \zeta) - 1$. $D' \in |D|$ sei ein beliebig vorgegebener Divisor. Die Gesamtheit der Hyperebenen von P_N, die $\phi_\zeta(D')$ enthalten, bildet einen projektiven Raum der Dimension $H^o(X, \eta) - 1$. Der Durchschnitt aller dieser Hyperebenen hat die Dimension $H^o(X, \zeta) - H^o(X, \eta) - 1 = n$, wie sich aus (c) ergibt. $\phi_\zeta(D')$ ist also der genaue Durchschnitt dieser Hyperebenen, mithin ein projektiver Raum P_n.

Die Aussage des Zusatzes wurde von Andreotti bewiesen ([1] p.59-66). Auf Grund von 4.4.1, 4.1.1, 4.2.2 kann man Andreottis Satz leicht beweisen. Es gibt eine ausgezeichnete q-Basis

($q=0$ bzw. $q=1$), so daß $c_1(X) = 2\varepsilon + (2-q)\nu$ und daß eine positive Klasse $a\varepsilon + b\nu$ mit $a > 0$ existiert. Ist D ein Divisor auf X mit dualer Klasse ν, so folgt sofort aus 1.2.2, daß der Spezialitätsindex verschwindet, und damit aus dem Satz von Riemann-Roch, dass $\dim|D| \geqq 1$. Man zeigt wie bei Andreotti, daß jede Kurve aus $|D|$ irreduzibel ist. Man berechnet sofort, daß das virtuelle Geschlecht der Kurven aus $|D|$ gleich 0 ist. $|D|$ besteht also aus rationalen singularitätenfreien Kurven, und damit folgt wie im Beweis 4.4.3 (f), daß X eine Σ-Fläche ist.

4.5. Deformationen von Σ-Mannigfaltigkeiten

Im folgenden benutzen wir die Terminologie der Arbeit von Kodaira und Spencer über die Deformationen komplex analytischer Strukturen. Bezüglich aller Einzelheiten sei auf [27] verwiesen.

Satz 4.5.1.
i) Jede hinreichend kleine Deformation einer Σ-Mannigfaltigkeit ist eine Σ-Mannigfaltigkeit.
ii) Jede Kählersche Deformation einer Σ-Fläche ist eine Σ-Fläche.

Beim Beweis benutzen wir 4.4.3 und das folgende Lemma:

Lemma 4.5.2.
$\mathcal{V} = \{V_t \mid t \in M\}$ sei eine differenzierbare Familie komplexer Mannigfaltigkeiten V_t. Für $o \in M$ sei V_o Kählersch und $h^{o,2}(V_o) = 0$. Ferner sei E ein projektiv induziertes Geradenbündel über V_o mit $H^1(V_o,E) = 0$.
Dann existiert für eine Umgebung U von o in M eine Fortsetzung $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{V}|U$ von E, d.h. eine differenzierbare Familie $\mathcal{E} = \{E_t \mid t \in U\}$ holomorpher Geradenbündel E_t über V_t mit $E_o = E$, derart, daß alle E_t projektiv induziert sind.

Beweis von 4.5.2: (vgl. [27] § 13)
Nach dem Prinzip der Oberhalbstetigkeit (3.2.9) gilt $h^{o,2}(V_t) = 0$ für alle t in einer hinreichend kleinen Umgebung U' von o in M. Damit ist [27], prop.13.2 anwendbar und ergibt die Existenz einer Fortsetzung $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{V}|U'$. Wegen der Oberhalbstetigkeit gilt $H^1(V_t,E_t) = 0$ für alle t in

einer hinreichend kleinen Umgebung U'' von o. Dann ist nach [27] theorem 2.3 $\dim H^0(V_t, E_t) = \dim H^0(V_o, E_o) =: N+1$ für $t \in U''$, und nach [27] prop. 2.7 ist $\bigcup_{t \in U''} H^0(V_t, E_t)$ ein differenzierbares komplexes Vektorraumbündel H über U'' und der Vektorraum der differenzierbaren Schnitte in H ist isomorph zu $H^0(\mathcal{V}|U''; \mathcal{O}_F(\mathcal{E}))$, wobei $\mathcal{O}_F(\mathcal{E})$ die Garbe der Keime differenzierbarer Schnitte in $\mathcal{E}$ ist, die auf jeder Faser V_t holomorph sind. (Vgl. hierzu auch [10].) Für eine auf einen Punkt zusammenziehbare Umgebung von o $U''' \subset U''$ ist $H|U'''$ trivial, und es gibt $N+1$ differenzierbare Schnitte $\varphi_o, \ldots, \varphi_N \in H^0(\mathcal{V}|U'''; \mathcal{O}_F(\mathcal{E}))$, so daß für $t \in U'''$ die Beschränkungen auf V_t $\varphi_{t,o}, \ldots, \varphi_{t,N} \in H^0(V_t, E_t)$ eine Basis von $H^0(V_t, E_t)$ bilden. Die Abbildung $\phi_{E_o}: V_o \longrightarrow P_N$, die durch $\phi_{E_o}(x) := (\varphi_{o,o}(x), \ldots, \varphi_{o,N}(x))$ definiert wird, ist eine holomorphe Einbettung. Daher gibt es wegen der Kompaktheit von V_o eine Umgebung von o $U'''' \subset U'''$, so daß man jedem $x \in \mathcal{V}|U''''$ einen wohldefinierten Punkt $(\varphi_o(x), \ldots, \varphi_N(x))$ aus P_N zuordnen kann, und daß dadurch eine differenzierbare Abbildung $\phi_\mathcal{E}: \mathcal{V}|U'''' \longrightarrow P_N$ definiert wird, deren Beschränkung auf jedes V_t holomorph und deren Beschränkung ϕ_{E_o} auf V_o eine Einbettung ist.

Behauptung: Es gibt eine Umgebung U von o; $U \subset U''''$, so daß für $t \in U$ $\phi_\mathcal{E}|V_t$ eine holomorphe Einbettung, mithin E_t projektiv induziert ist. Beweis: Zu zeigen ist nur die Injektivität von $\phi_\mathcal{E}|V_t$ für alle t aus einem geeigneten U (siehe z.B. [35] Satz 32). Gäbe es kein solches U, so könnte man zwei Folgen von Punkten $\{x_\nu\}$, $\{y_\nu\}$ finden mit $x_\nu, y_\nu \in V_{t_\nu}$, so daß die Folge $\{t_\nu\}$ gegen $o \in M$ konvergiert und $\{x_\nu\}$ gegen $x \in V_o$, $\{y_\nu\}$ gegen $y \in V_o$, und daß $\phi_\mathcal{E}(x_\nu) = \phi_\mathcal{E}(y_\nu)$. Wegen der Stetigkeit von $\phi_\mathcal{E}$ und der Injektivität von ϕ_{E_o} wäre $x = y$. Dies führt aber zu einem Widerspruch, denn man kann zu jedem $x \in V_o$ eine Umgebung W von x in $\mathcal{V}$ finden, so daß für alle t mit $V_t \cap W \neq \emptyset$ $\phi_\mathcal{E}|V_t \cap W$ injektiv ist. Diese rein lokale Eigenschaft von $\phi_\mathcal{E}$ folgt unmittelbar aus dem folgenden Hilfssatz über differenzierbare Abbildungen:

Hilfssatz:

U sei eine Umgebung des Nullpunktes in $R^n \times R^k$, $f: U \longrightarrow R^p$ eine differenzierbare Abbildung. $f|(R^n \times \{0\}) \cap U$ habe im Nullpunkt den Rang n. Dann gibt es eine Umgebung W des Nullpunktes, $W \subset U$, so daß für alle $t \in R^p$ mit $(R^n \times \{t\}) \cap W \neq \emptyset$ $f|(R^n \times \{t\}) \cap W$ injektiv ist.

Beweis: (Vgl. Milnor, Differential Topology, Princeton 1958). $(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_k)$ seien cartesische Koordinaten in $R^n \times R^k$. Bei geeigneter Wahl von Koordinaten $(y_1,\ldots,y_p)$ in R^p gilt für die f darstellenden Funktionen $f_i(x,t)$

$$f_i(0,0) = 0\ , \quad i=1,\ldots,p, \quad \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{(0,0)} = \delta^i_j\ , \quad i,j = 1,\ldots,n\ .$$

Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen $n = p$ (da man f mit der Projektion $(y_o,\ldots,y_p) \longrightarrow (y_o,\ldots,y_n,0,\ldots,0)$ komponieren kann und dann die Injektivität zeigen kann). Es gibt eine Würfelumgebung W von $(0,0)$ in $R^n \times R^k$, so daß für alle $(x,t) \in W$ gilt

$$\mathrm{Det}\left(\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{(x,t)} \right) \neq 0 \quad \text{und für alle } i,j \quad \left| \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{(x,t)} - \delta^i_j \right| \leq \frac{1}{2n}\ .$$

Dann gilt für (x,t), $(x',t) \in W$

$$\max_{i=1,\ldots,n} |f_i(x,t) - f_i(x',t) + x_i' - x_i| \leq \frac{1}{2} \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - x_i'|$$

Also ist für $x \neq x'$ $f(x,t) \neq f(x',t)$, denn sonst würde im Widerspruch zur obigen Ungleichung gelten

$$\max_{i=1,\ldots,n} |f_i(x,t) - f_i(x',t) + x_i' - x_i| = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - x_i'|$$

Beweis von 4.5.1.i)

Voraussetzung: $\mathcal{V} = \{V_t \mid t \in M\}$ sei eine differenzierbare Familie komplexer Mannigfaltigkeiten, und es sei $V_o = \Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$. Es sei $\sum a_i \equiv q(n+1)$, $0 \leq q \leq n$, und $\{\varepsilon, \nu\}$ die ausgezeichnete q-Basis von $H^2(V_o,Z)$, so daß $c_1(V_o) = (n+1)\,\varepsilon + (2-q)\,\nu$. E_o sei ein projektiv induziertes Geradenbündel mit $H^1(V_o,E_o)=0$,

$c_1(E_o) = \varepsilon + b\nu$. (Existiert nach 4.4.2) Nach Lemma 4.5.2 existiert eine Fortsetzung $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{V}|U$ von E_o für eine geeignete Umgebung U von o in M. U werde außerdem als zusammenziehbar angenommen, so daß $\mathcal{V}|U$ als differenzierbares Faserbündel trivial ist. $i_t : V_t \longrightarrow \mathcal{V}|U$ bezeichne die Inklusion. Für $t \in U$ gibt es einen orientierungstreuen Diffeomorphismus $f_t : V_t \longrightarrow V_o$, so daß i_t und $i_o f_t$ homotop sind. Dann ist

$$\begin{tikzcd} & H^2(\mathcal{V}|U, Z) \arrow[dl, "i_o^*"', "\cong"] \arrow[dr, "i_t^*", "\cong"'] & \\ H^2(V_o, Z) \arrow[rr, "\cong", "f_t^*"'] & & H^2(V_t, Z) \end{tikzcd}$$

kommutativ. Ist $\mathfrak{F}$ das komplexe Bündel entlang den Fasern von $\mathcal{V}|U$, so induziert $\mathfrak{F}$ auf jedem V_t das komplexe kontravariante Tangentialbündel.

Es gilt also:

$$i_t^*(c_1(\mathfrak{F})) = c_1(V_t) \qquad i_t^*(c_1(\mathcal{E})) = c_1(E_t) .$$

$\varepsilon' = f_t^*(\varepsilon)$, $\nu' = f_t^*(\nu)$ ist eine ausgezeichnete q-Basis von $H^2(V_t, Z)$, so daß $c_1(V_t) = (n+1)\varepsilon' + (2-q)\nu'$, und für das projektiv induzierte E_t $c_1(E_t) = \varepsilon' + b\nu'$, und damit ergibt sich aus dem Hauptsatz 4.4.3, daß V_t eine Σ-Mannigfaltigkeit $\Sigma_{b_1,\ldots,b_n}$ ist mit $\sum b_i \equiv q(n+1)$.

4.5.1 ii) Man sieht leicht, daß es wegen 4.5.1 i) genügt, folgende Behauptung zu beweisen: $\mathcal{V} = \{V_t, -1 < t < 1\}$ sei eine differenzierbare Familie komplexer Strukturen, V_o sei kählersch und für $t > 0$ sei V_t eine Σ-Fläche. Dann ist V_o eine Σ-Fläche.

Beweis: $\{\varepsilon, \nu\}$ sei eine ausgezeichnete Basis von $H^2(V_o, Z)$ mit $c_1(V_o) = a_1\varepsilon + a_2\nu$, $a_1 > 0$. Wie im Beweis von 4.5.1 i) wird durch $\varepsilon' = i_t^* i_o^{*-1}\varepsilon$, $\nu' = i_t^* i_o^{*-1}\nu$ eine ausgezeichnete Basis von $H^2(V_t,Z)$ definiert mit $c_1(V_t) = a_1\varepsilon' + a_2\nu'$. Gäbe es ein projektiv induziertes Geradenbündel E_o über V_o mit $c_1(E_o) = b_1\varepsilon + b_2\nu$, $b_1 \leq 0$, so gäbe es für hinreichend kleines t nach 4.5.2 auch ein projektiv induziertes E_t^λ über V_t mit $c_1(E_t^\lambda) = \lambda(b_1\varepsilon' + b_2\nu')$. Das führt aber für $t > 0$ zu einem Widerspruch, da dann auf der Σ-Fläche V_t auch positive Klassen $c_1\varepsilon' + c_2\nu'$ mit $c_1 > 0$ existieren und daher ν' positiv wäre im Widerspruch zu $\nu'^2 = 0$. Da aber V_o wegen $h^{o,2} = 0$ algebraisch ist, existieren projektiv induzierte Bündel auf V_o, also solche mit erster Chernscher Klasse $b_1\varepsilon + b_2\nu$ und $b_1 > 0$. Damit folgt aus dem Satz von Andreotti (4.4.3), daß V_o eine Σ-Mannigfaltigkeit ist.

Definition: Zwei komplexe Mannigfaltigkeiten X', X'' sind ineinander deformierbar (Kodaira sagt "c-homotop"), wenn es eine differenzierbare Familie $\mathcal{V} = \{V_t \mid t \in M\}$ komplexer Mannigfaltigkeiten gibt und $t', t'' \in M$, so daß X' bzw. X'' biholomorph äquivalent sind zu $V_{t'}$ bzw. $V_{t''}$.
Dies ist eine Äquivalenzrelation ([27] p. 337).

Satz 4.5.3.

i) Die komplexen Mannigfaltigkeiten $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$, $\Sigma_{b_1,\ldots,b_n}$ sind ineinander deformierbar, genau wenn
$\sum a_i - \sum b_i \equiv 0(n+1)$

ii) Insbesondere sind also für gerades n und für $\sum a_i + \sum b_i \equiv 0(n+1)$, $\sum a_i \not\equiv 0(n+1)$ die komplexen Mannigfaltigkeiten $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$, $\Sigma_{b_1,\ldots,b_n}$ zwar orientierungstreu diffeomorph zueinander, aber nicht ineinander deformierbar.

Beweis: i) $(y_o, y_1; x_o, \ldots, x_{2n})$ seien bihomogene Koordinaten in $P_1 \times P_{2n}$, $t \in C$ ein komplexer Parameter. Gegeben sei eine Folge von ganzen Zahlen

$$0 = a_o \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$$

Für ein bestimmtes Indexpaar j,k sei $a_k > a_j + 1$. m sei eine natürliche Zahl $0 < m < a_k - a_j$. Man betrachte die in $P_1 \times P_{2n} \times C$ durch die folgenden Gleichungen gegebene komplexe Mannigfaltigkeit $\mathcal{V}$

$$y_o^{a_i} x_{2i-1} - y_1^{a_i} x_{2i} = 0 \qquad\qquad i \neq k, \ 1 \leqslant i \leqslant n$$

$$y_o^{a_k} x_{2k-1} - y_1^{a_k} x_{2k} - t\, y_o^{a_k - a_j - m}\, y_1^{a_j+m}\, x_{2j} = 0$$

$\mathcal{V}$ ist eine komplexe Familie komplexer Strukturen.
$\mathcal{V} \cap (P_1 \times P_{2n} \times \{t\})$ ist für $t=0$ die Mannigfaltigkeit $\sum_{a_1,\ldots,a_n}$, für $t \neq 0$ aber diejenige $\sum$-Mannigfaltigkeit, die durch die folgende transition function gegeben wird.

$$g_{1,0}(z) = \begin{pmatrix} z^{a_o} & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 \\ & & z^{a_j} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & \\ \cdots & & tz^{a_j+m} & \cdots\ 0 \cdots & z^{a_k} & \cdots \\ & & & & & \ddots \\ & 0 & \vdots & & & z^{a_n} \end{pmatrix} \longleftarrow (k+1)\text{-te Zeile}$$

$$\uparrow$$
$$(j+1)\text{-te Spalte.}$$

Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & t^{-1} \\ -1 & t^{-1}z^{-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{a_j} & 0 \\ tz^{a_j+m} & z^{a_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -z^{a_k-a_j-m} \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{a_j+m} & 0 \\ 0 & z^{a_k-m} \end{pmatrix}$$

Daher kann V_t bezüglich geeigneter Bündelkoordinaten auch durch die folgende transition function beschrieben werden:

$$g_{1,0}(z) = \begin{pmatrix} z^{a_0} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & z^{a_j+m} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & z^{a_k-m} & \\ 0 & & & & \ddots\, z^{a_n} \end{pmatrix}$$

Damit ist also bewiesen:

<u>Hilfssatz:</u> Es sei $0 < m < a_k - a_j$ und

$0 = a_0 \leqslant \ldots \leqslant a_{j-1} \leqslant a_j + m \leqslant a_{j+1} \leqslant \ldots \leqslant a_{k-1} \leqslant a_k - m \leqslant \ldots \leqslant a_n$.

Dann sind $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ und $\Sigma_{a_0,\ldots,a_j+m,\ldots,a_k-m,\ldots,a_n}$ ineinander deformierbar.

Hieraus ergibt sich sofort:

a) $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ und $\Sigma_{0,\ldots,0,\Sigma a_i}$ sind ineinander deformierbar.

Denn es gilt: $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ c-homotop $\Sigma_{0,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n+a_1}$ c-homotop $\Sigma_{0,0,\ldots,a_{n-1},a_n+a_1+a_2}$ und so weiter.

b) Für $s = r(n+1)+q$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant q \leqslant n$, sind $\Sigma_{0,\ldots,0,s}$ und $\Sigma_{0,\ldots,0,q}$ c-homotop.

Denn nach dem Hilfssatz ist $\Sigma_{0,\ldots,0,s}$ c-homotop $\Sigma_{0,\ldots,r,rn+q}$ c-homotop $\Sigma_{0,\ldots,r,r,r(n-1)+q}$ ... c-homotop $\Sigma_{r,r,r,\ldots,r,2r+q}$ c-homotop $\Sigma_{0,\ldots,0,q}$.

c) Insgesamt ergibt sich: Ist $\Sigma a_i \equiv q(n+1)$, $0 \leqslant q \leqslant n$, so gilt: $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ c-homotop $\Sigma_{0,\ldots,0,\Sigma a_i}$ c-homotop $\Sigma_{0,\ldots,0,q}$.

Damit ist bewiesen, daß für $\Sigma a_i - \Sigma b_i \equiv 0(n+1)$ $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ und $\Sigma_{b_1,\ldots,b_n}$ ineinander deformierbar sind.

d) Daß für $\Sigma a_i - \Sigma b_i \not\equiv 0(n+1)$ $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ und $\Sigma_{b_1,\ldots,b_n}$ nicht ineinander deformierbar sind, folgt unter Benutzung des gleichen Argumentes wie beim Beweis von 4.5.1 i) daraus, daß $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ und $\Sigma_{b_1,\ldots,b_n}$ wesentlich verschiedene Chernsche Klassen haben. (4.2.4 iii).)

ii) Die Behauptung folgt trivial aus i) und Satz 4.3.1 ii).

Die für ein bestimmtes $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ im Beweis von 4.5.3 konstruierten komplex-analytischen Familien von Σ-Mannigfaltigkeiten lassen sich als Unterfamilien von einer einizigen komplex-analytischen Familie $\mathcal{V} \longrightarrow C^d$, $d = \dim H^1(\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}, \Theta)$, mit $V_0 = \Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ auffassen, die im Nullpunkt von C^d maximal ist. Diese Familie soll im folgenden untersucht werden.

Im Fall einer komplex-analytischen Familie $\mathcal{V} \xrightarrow{\omega} M$ bedeutet Maximalität von $\mathcal{V}$ in $t \in M$ folgendes: Es sei $\mathcal{E}$ das komplexe Tangentialbündel von $\mathcal{V}$, $\mathcal{F}$ das komplexe Bündel entlang den Fasern. E_t bzw. F_t sei die Beschränkung von $\mathcal{E}$ bzw. $\mathcal{F}$ auf V_t, Ψ_t bzw. Θ_t die Garben der Keime holomorpher Schnitte in E_t bzw. F_t. Man hat also eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Theta_t \longrightarrow \Psi_t \xrightarrow[j_t]{} \Psi_t/\Theta_t \longrightarrow 0$$

Ferner läßt sich die Urbildgarbe bzgl. $\omega \mid V_t$ von dem Tangentialraum $(T_M)_t$ von M in t (konstante Garbe) als Untergarbe T_t von Ψ_t/Θ_t auffassen. Es sei $\Pi_t := j_t^{-1}(T_t)$.

Man hat die exakte Sequenz von Garben

$$0 \longrightarrow \Theta_t \longrightarrow \Pi_t \longrightarrow T_t \longrightarrow 0$$

und die zugehörige exakte Cohomologiesequenz

$$0 \longrightarrow H^0(V_t, \Theta_t) \longrightarrow H^0(V_t, \Pi_t) \longrightarrow H^0(V_t, T_t) \xrightarrow{\delta^*} H^1(V_t, \Theta_t) \qquad *)$$

$H^0(V_t, T_t)$ ist kanonisch isomorph zum Tangentialraum $(T_M)_t$.

Komposition dieses Isomorphismus mit δ^* liefert einen Homomorphismus

$$\rho_t : (T_M)_t \longrightarrow H^1(V_t, \Theta_t)$$

Definition: $\mathcal{V}$ heißt maximal in t, wenn ρ_t surjektiv ist. Wenn dies gilt, möge zur Vereinfachung der Ausdrucksweise $\mathcal{V}$ eine für V_t maximale Familie von Deformationen von V_t genannt werden.

In 4.2.7 wurde bewiesen: $H^2(\sum_{a_1,\ldots,a_n}, \Theta) = 0$. Nach Kodaira, Nirenberg und Spencer [28] gilt:
Für eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit V mit $H^2(V, \Theta) = 0$ existiert eine für V maximale komplexe Familie von Deformationen von V.
Für jede $\sum$-Mannigfaltigkeit läßt sich leicht eine solche Familie angeben:

Satz 4.5.4.
Für $\sum_{a_1,\ldots,a_n}$ ist $d := \dim H^1(\sum_{a_1,\ldots,a_n}, \Theta) =$

$$= \sum_{\substack{a_i > a_j \\ 0 \leq i,j \leq n}} (a_i - a_j - 1) \qquad (\text{wobei } a_0 := 0)$$

Es seien $t_{i,j,m_{ij}}$, $0 < m_{ij} < a_i - a_j$, komplexe Koordinaten in C^d, $(y_0, y_1; x_0, \ldots, x_{2n})$ bihomogene Koordinaten in $P_1 \times P_{2n}$. $\mathcal{V}$ sei die durch die folgenden Gleichungen in $P_1 \times P_{2n} \times C^d$ definierte komplexe Mannigfaltigkeit.

$$y_0^{a_i} x_{2i-1} - y_1^{a_i} x_{2i} - \sum_{j=0}^{i-1} \Big(\sum_{0 < m_{ij} < a_i - a_j} t_{i,j,m_{ij}} \, y_0^{a_i - a_j - m_{ij}} \, y_1^{a_j + m_{ij}} \Big) x_{2j} = 0$$

$$i = 1, \ldots, n.$$

$\mathcal{V}$ ist eine für $V_0 = \sum_{a_1,\ldots,a_n}$ maximale Familie von Deformationen von $\sum_{a_1,\ldots,a_n}$.

Beweis: Da die Dimension des Parameterraums C^d gleich $\dim H^1(\Sigma_{a_1,\dots,a_n},\Theta)$ ist, hat man nur die Injektivität von δ^* nachzuweisen. Ferner ist für eine komplexe Unterfamilie $\mathcal{V}' \longrightarrow M'$ von $\mathcal{V} \longrightarrow M$ das folgende Diagramm, in dem i_* die durch die Inklusion $i : M' \longrightarrow M$ induzierte Abbildung der Tangentialräume bedeutet, kommutativ.

$$\begin{tikzcd}
(T_{M'})_{t'} \arrow[rr, "i_*"] \arrow[dr, "\rho'_{t'}"'] & & (T_M)_{t'} \arrow[dl, "\rho_{t'}"] \\
& H^1(V_{t'}, \Theta_{t'}) &
\end{tikzcd}$$

Daher genügt es, folgendes zu beweisen: $(t_{i,j,m_{ij}}) \in C^d - \{0\}$ sei ein fester Punkt. Die komplexe Zahlenebene C werde durch $C \ni t \longrightarrow t(t_{i,j,m_{ij}}) \in C^d$ in C^d eingebettet. Dann gilt für die auf C durch $\mathcal{V}$ induzierte Familie von komplexen Strukturen $\mathcal{V}' = \{ V'_t,\ t \in C \}$: $\delta^* : H^0(V'_0, T'_0) \longrightarrow H^1(V'_0, \Theta_0)$ ist injektiv. Wegen der exakten Sequenz *) ist dies äquivalent mit der Aussage: $H^0(V'_0, \Theta_0) \longrightarrow H^0(V'_0, \Pi'_0)$ ist surjektiv. Um die Surjektivität zu beweisen, genügt es, da Π'_0 Untergarbe von Ψ'_0 ist, zu zeigen: $H^0(V'_0, \Theta_0) \longrightarrow H^0(V'_0, \Psi'_0)$ ist surjektiv. Das zu Ψ'_0 gehörige holomorphe Vektorraumbündel E'_0 läßt sich durch transition functions wie folgt beschreiben: Auf $\mathcal{V}'$ werden die offenen Mengen $U_{i,j}$ folgendermaßen definiert:

$U_{0,i} := \{ (y,x) \in \mathcal{V}' \mid y_0, x_{2i} \neq 0 \}$ $i=0,\dots,n$

$U_{1,0} := \{ (y,x) \in \mathcal{V}' \mid y_1 \neq 0,\ x_0 \neq 0 \}$

$U_{1,i} := \{ (y,x) \in \mathcal{V}' \mid y_1 \neq 0,\ x_{2i-1} \neq 0 \}$ $i=1,\dots,n$.

Das System $\{ U_{h,i} \}$ bildet eine Überdeckung von $\mathcal{V}'$. Mit Hilfe der bihomogenen Koordinaten $(y_0, y_1; x_0, \dots, x_{2n})$ und des Parameters t führt man in naheliegender Weise auf $U_{h,i}$ komplexe Koordinaten ein, insbesondere auf

$U_{0,0}$: $z_0 = y_1 y_0^{-1}$; $z_i = x_{2i}\, x_0^{-1}$, $i=1,\dots,n$; t

$U_{1,0}$: $w_0 = y_0 y_1^{-1}$; $w_i = x_{2i-1} x_0^{-1}$, $i=1,\dots,n$; t

E_0' ist die Beschränkung des komplexen Tangentialbündels von $\mathcal{V}'$ auf V_0'. Die transition functions sind durch die Funktionaldeterminante der komplexen Koordinatentransformationen gegeben. Sie sind, da in allen $U_{h,i}$ t als letzte Koordinate benutzt werden kann, von der Gestalt

$$\left(\begin{array}{c|c} D & \\ \hline 0\dots 0 & 1 \end{array}\right)$$

wobei D für festes t die transition functions für das Tangentialbündel von V_t' beschreibt. Wird daher ein Schnitt s in E_0', also $s \in H^0(V_0', \Psi_0')$, bezüglich der Bündelkoordinatenumgebungen $\tilde{U}_{h,i} := U_{h,i} \cap V_0'$ beschrieben durch $(n+2)$-Tupel holomorpher Funktionen $(s_{h,i;0},\dots,s_{h,i;n+1})$, so gilt für $\tilde{U}_{h',i'} \cap \tilde{U}_{h,i}$: $s_{h',i';n+1} = s_{h,i;n+1}$, d.h. $s_{h,i;n+1} = c(s) =$ $=$ const. wegen der Kompaktheit von V_0'.

Die Surjektivität von $H^0(V_0', \Theta_0) \longrightarrow H^0(V_0', \Psi_0')$ ist bewiesen, wenn gezeigt ist, daß für jedes $s \in H^0(V_0', \Psi_0')$ gilt $c(s) = 0$. Dies wirdnun folgendermaßen bewiesen: s sei bezüglich der Koordinatenumgebungen $\tilde{U}_{0,0}$ bzw. $\tilde{U}_{1,0}$ gegeben durch $(s_{0,0},\dots,s_{0,n},c)$ bzw. $(s_{1,0},\dots,s_{1,n},c)$. Wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$A_{i,j}(z_0) := \sum_{0<m_{ij}<a_i-a_j} t_{i,j,m_{ij}} z_0^{a_j+m_{ij}}$$

– also grad $A_{ij}(z_0) < a_i$ – so gilt in $\tilde{U}_{0,0} \cap \tilde{U}_{0,1}$:

$$s_{1,i} = a_i z_0^{a_i-1} z_i s_{0,0}(z_0,\dots,z_n) + z_0^{a_i} s_{0,i}(z_0,\dots,z_n) + c \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}(z_0) z_j$$

Durch Einsetzen von $z_0 = w_0^{-1}$, $z_i = w_0^{a_i} w_i$ $i=1,\dots,n$

entnimmt man hieraus, daß für ein i mit $A_{i,j} z_j \neq 0$ aus $c \neq 0$ folgen würde, daß $s_{1,i}$ keine holomorphe Funktion von $w_0,\dots,w_n$ wäre. Also ist $c = 0$ und damit ist 4.5.4 bewiesen.

Bemerkungen zu 4.5.4 : Die in 4.5.4 definierte Familie besteht natürlich nur aus Σ-Mannigfaltigkeiten. Die "Sprungstellen" für die komplexe Struktur bilden analytische Mengen ([10]). Besonders einfach sind die Verhältnisse für die Σ-Flächen. In der in 4.5.4 für Σ_a definierten Familie kommen genau die Σ_b mit $b \leq a$, $a-b \equiv 0(2)$ vor. Daß in einer hinreichend kleinen Umgebung nur diese vorkommen können, folgt schon aus dem Prinzip der Oberhalbstetigkeit (vgl. [11]). Für Σ-Flächen waren die im Beweis von 4.5.3 benutzten Deformationen schon lange bekannt (siehe z.B. Atiyah, M.F. : Complex fibre bundles and ruled surfaces. Proc.London Math.Soc. 3.Ser., Vol.V (1955) p.433).

Eine leichte Folgerung aus 4.5.4 und 4.2.7 zusammen mit dem Stabilitätssatz von Frölicher-Nijenhuis ist:

Korollar 4.5.5.
Die komplexe Struktur von $\Sigma_{a_1,\ldots,a_n}$ ist lokal stabil bezüglich Deformationen, genau wenn $a_i \leq 1$ für $i=1,\ldots,n$.

Eine komplex analytische Familie $\mathcal{V} = \{V_t \mid t \in M\}$ heißt vollständig in t_0, wenn es für jede komplex analytische Familie $\mathcal{V}' = \{V'_{t'} \mid t' \in M'\}$, für die für ein t'_0 gilt $V'_{t'_0} = V_{t_0}$, eine Umgebung U von t'_0 gibt, so daß $\mathcal{V}' | U$ durch eine holomorphe Abbildung von U in M von $\mathcal{V}$ induziert wird.

Korollar 4.5.6.
Die in 4.5.4 definierte Familie $\mathcal{V} \longrightarrow C^d$ ist vollständig im Nullpunkt von C^d.

Beweis: 4.5.6 folgt aus der Surjektivität von ρ_t für $t=0$. (Kodaira-Spencer: A Theorem of Completeness for Complex Analytic Fibre Spaces. Acta math. 100 (1958).)

Satz 4.5.7.

Jede Deformation einer Σ-Fläche ist eine Σ-Fläche

Beweis: Wegen 4.5.1 genügt es, folgendes zu zeigen: $\mathcal{V} = \{ V_t \mid -1 < t < 1 \}$ sei eine differenzierbare Familie komplexer Strukturen und für $t > 0$ sei V_t eine Σ-Fläche. Dann ist V_o algebraisch.
Nach van de Ven ([42] Lemma 2.3) genügt es zu zeigen, daß auf V_o ein (nicht notwendig positiver) Divisor mit strikt positivem Selbstschnitt existiert. Es sei $\mathfrak{F}$ das Bündel entlang den Fasern von $\mathcal{V}$, $\mathcal{E}$ die Familie von holomorphen Geradenbündeln $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{F}$
Für die Beschränkung E_t von $\mathcal{E}$ auf eine Faser V_t gilt $\chi(V_t, E_t) = 9$ (vgl. 4.2.4, 4.2.5). Für $t > 0$ folgt aus der Serre-Dualität und dem Verschwinden der Plurigeschlechter der Σ-Flächen $\dim H^o(V_t, E_t) \geq 9$. Daher ist nach dem Prinzip der Oberhalbstetigkeit auch $\dim H^o(V_o, E_o) \geq 9$. Ferner ist $(c_1(E_t))^2 [V_t] = 8$, und daher haben die zu den Schnitten in E_o gehörigen Divisoren strikt positiven Selbstschnitt, womit 4.5.7 bewiesen ist.

Literaturverzeichnis

[1] Andreotti A.: On the Complex Structures of a Class of Simply-connected Manifolds. Algebraic Geometry and Topology. Princeton Univ. Press 1957.

[2] Borel A.- Hirzebruch F.: Characteristic Classes and Homogeneous Spaces I. Am. Journ. of Math. Vol.LXXX, 458-538 (1958) Part II. Am. Journ. Vol. LXXXI, 315-382 (1959)

[3] Borel A.- Serre J.P.: Le théorème de Riemann-Roch. Bull. de la Soc. Math. de France, Tome 86, 97-136 (1958)

[4] Borel A.- Haefliger A.: La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique. Bull. de la Soc. Math. de France, Tome 89, 461-513 (1961)

[5] Bott R.:Homogeneous Vector Bundles. Ann. of Math. 66, 203-248 (1957)

[6] Chevalley C.: Theory of Lie Groups I. Princeton Univ. Press 1946.

[7] Chevalley C.: Séminaire 2. Anneaux de Chow et Applications. 1958.

[8] Ehresmann Ch.: Topologie de certains espaces. Ann. of Math. 35,(1934)

[9] Grauert H.- Remmert R.: Bilder und Urbilder Analytischer Garben. Ann. of Math. 68, 393-443 (1958)

[10] Grauert H.: Ein Theorem der Analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Nr. 5, Paris 1960.

[11] Grauert H.: On the Number of Moduli of Complex Structures. Contrib. Function Theory. Intern. Colloqu. Bombay 1960, p. 63-78.

[12] Grauert H.: Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. Math. Ann. 146, 331-368 (1962)

[13] Grothendieck A.: A General Theory of Fibre Spaces with Structure Sheaf. Lawrence, Kansas: Univ. of Kansas 1955 (vervielfältigt).

[14] Grothendieck A.: Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann. Am. Journ. Math. 79 (1957)

[15] Hirzebruch F.: Über eine Klasse von einfach-zusammen hängenden komplexen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 124, 77-86 (1951/52)

[16] Hirzebruch F.: Some Problems on Differentiable and Complex Manifolds. Ann. of Math. 60, 213-236 (1954)

[17] Hirzebruch F.: Der Satz von Riemann-Roch in faisceau-theoretischer Formulierung, einige Anwendungen und offene Fragen. Proceed. Int. Congr. of Math. , Amsterdam 1954.

[18] Hirzebruch F.: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. Ergebnisse der Mathematik. N. F. Heft 9, 2. Auflage Berlin 1962.

[19] Hirzebruch F.- Kodaira K.: On the Complex Projective Spaces. Journal de Math. XXXVI, 201-216 (1957)

[20] Hirzebruch F.: Komplexe Mannigfaltigkeiten. Proceed. Int. Congr. of Math. 1958, Cambridge Univ. Press 119-136.

[21] Hodge W.V.D.-Pedoe D.: Methods of Algebraic Geometry II. Cambridge Univ. Press 1952.

[22] Ise M.: Some Properties of Complex Analytic Vector Bundles over Compact Complex Homogeneous Spaces. Osaka Math. Journ. 12, 217-252 (1960)

[23] Kaup W.: Holomorphe Vektorfelder und Transformationsgruppen komplexer Räume. Dissertation, Erlangen 1962 (vervielfältigt).

[24] Kodaira K.- Spencer D. C.: Groups of Complex Line Bundles over Compact Kähler Varieties. Divisor Class Groups on Algebraic varieties. Proceed. Nat. Acad. Sci. USA 39, 868-877 (1953).

[25] Kodaira K.: On a Differential-geometric Method in the Theory of Analytic Stacks. Proceed. Nat. Acad. Sci. USA 39, 1268-1273 (1953)

[26] Kodaira K.: On Kähler Varieties of Restricted Type. Ann. of Math. 60, 28-48 (1954)

[27] Kodaira K.- Spencer D. C.: On Deformations of Complex Analytic Structures I-II. Ann. of Math. 67, 328-466 (1958)

[28] Kodaira K.- Nirenberg L.- Spencer D. C.: On the Existence of Deformations of Complex Analytic Structures. Ann. of Math. 68, 450-459 (1958)

[29] Kodaira K.: On Compact Complex Analytic Surfaces I. Ann. of Math. 71,111-152 (1960)

[30] Kreyszig E.: Stetige Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 128, 479-492 (1954/55)

[31] Lelong P.: Intégration sur un ensemble analytique complexe. Bull. Soc. Math. de France 85,239-262(1957)

[32] Maroni A.: Sulla dimensione dei sistemi lineari sopra le varietà algebriche a k+1 dimensioni contenenti un fascio di S_k. Annali di Matematica S.4 T.5, 185-205 (1928)

[33] Peters K.: Über holomorphe und meromorphe Abbildungen gewisser kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten. Dissertation, Erlangen 1962 (vervielfältigt).

[34] Remmert R.: Über stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume. Colloque de Topologie de Strasbourg (1954)

[35] Remmert R.: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Ann. 133, 328-370 (1957)

[36] Remmert R.- Van de Ven T.: Über holomorphe Abbildungen projektiv-algebraischer Mannigfaltigkeiten auf komplexe Räume. Math. Ann. 142, 453-486 (1961)

[37] Remmert R.- Van de Ven T.: Zur Funktionentheorie in homogenen komplexen Mannigfaltigkeiten. Erscheint demnächst.

[38] Röhrl H.: Holomorphic Fibre Bundles over Riemann Surfaces. Vervielfältigtes Manuskript zu einem Vortrag in Milwaukee 18.11.1961.

[39] Serre J.P.: Un théorème de dualité. Comm. Math. Helvet. 29, 9-26 (1955)

[40] Serre J.P.: Géométriealgébrique et géométrieanalytique. Ann. de l'Institut Fourier VI, 1-42 (1955/56)

[41] Steenrod N.: The Topology of Fibre Bundles. Princeton Univ. Press 1951.

[42] Van de Ven A.J.H.M.: Analytic Compactifications of Complex Homology Cells. Math. Ann. 147, 189-204 (1962)

[43] Weil A.: Fibre Spaces in Algebraic Geometry. Lecture Notes, vervielfältigt, Univ. of Chicago (1952).

Anmerkungen

1) Mit komplexen Räumen sind komplexe Räume im Sinne von Serre mit abzählbarer Basis der Topologie gemeint.

1') Untere Indizes bei komplexen Mannigfaltigkeiten bzw. bei Varietäten bezeichnen meist die komplexe Dimension. Sie werden bisweilen fortgelassen, wenn keine Verwechslungen möglich sind. Komplexe Mannigfaltigkeiten werden als zusammenhängend vorausgesetzt.

2) Statt $h^{p,q}(X)$ wird oft $h^{p,q}$ geschrieben, wenn klar ist, auf welche Mannigfaltigkeit X sich dies bezieht.

3) Auf einer komplexen Mannigfaltigkeit X_n ist in natürlicher Weise eine Orientierung gegeben. Sie wird bezüglich lokaler komplexer Koordinaten $z_j = x_{2j-1} + ix_{2j}$, $j=1,\ldots,n$, durch die Reihenfolge $x_1,\ldots,x_{2n}$ definiert. Ist X kompakt, so bezeichne $[X]$ den Fundamentalzykel bezüglich dieser Orientierung. Ist A eine Abelsche Gruppe, $c \in H^*(X_n,Z) \otimes A$, so bezeichne $c[X]$ den Wert des 2n-dimensionalen Teiles von c auf X .

4) Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit, G eine komplexe Liesche Gruppe, so bezeichnet G_ω die Garbe der Keime holomorpher Abbildungen von X in G. Entsprechend bezeichnet G_c bzw. G_d die Garbe der Keime stetiger bzw. differenzierbarer Abbildungen.

5) abgeleitet aus der exakten Sequenz $0 \longrightarrow Z \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow C^* \longrightarrow 0$

6) Die Idee dieses Beweises ist von A. Borel und wurde mir von F. Hirzebruch mitgeteilt.

7) Mit einer meromorphen Abbildung eines (Serreschen) komplexen Raumes X in einen komplexen Raum Y ist eine Abbildung von X in die Potenzmenge von Y gemeint mit den gleichen Eigenschaften, wie sie in [35] für meromorphe Abbildungen normaler komplexer Räume gefordert sind. [35] bezieht sich zwar nur auf normale komplexe Räume, aber die zitierten Sätze gelten allgemein (vgl. Remmert: "Projektionen analytischer Mengen", Math. Ann. 130, 410 - 441 (1956)).

8) Die Indizes sind hier natürlich keine Dimensionsindizes.

8') Es ist ferner vorauszusetzen, daß die Funktionaldeterminante überall Maximalrang hat. Daß diese Voraussetzung erfüllt ist, wird in 4.1.2 mitbewiesen.

9) P_1 ist die einzige einfach zusammenhängende homogene kompakte komplexe Mannigfaltigkeit mit der Eigenschaft von 4.1.7 (siehe [22], Theorem 5).

10) Die Formulierung der Aussage über Automorphismen holomorpher Vektorbündel über P_1 in [38] scheint eine Ungenauigkeit zu enthalten (Corollary zu 2.8).

11) Für jede Cohomologieklasse b wird gesetzt $b^0 = 1$.

12) Man braucht eine Aussage von dem Typ, daß für zwei homotopieäquivalente nur aus geradedimensionalen Zellen bestehende CW-Komplexe auch die jeweiligen Gerüste homotopieäquivalent sind.

13) Diese Schreibweise ist natürlich so zu verstehen, daß für ein Indexpaar i,j mit $a_i - a_j < 2$ gesetzt wird

$$\sum_{0<m_{ij}<a_i-a_j} t_{i,j,m_{ij}}\, y_0^{a_i-a_j-m_{ij}}\, y_1^{a_j+m_{ij}} = 0 .$$

14) Kodaira stellt in [27] für P_n eine stärkere Behauptung auf als 3.2.8 für Q_n, nämlich: Ist X Kählersch und die komplexe Struktur von X eine Deformation von P_n, so ist X ein P_n. - Es ist m.W. nicht klar, ob die stärkere Voraussetzung von 3.2.8 nötig ist. Jedenfalls gibt es Beispiele für nichtkählersche Deformationen von projektiv-algebraischen Mannigfaltigkeiten. (H.Hironaka: An example of a non-kählerian complex-analytic deformation of kählerian complex structures. Ann. of Math. 75, 190-208 (1962). -

Es ist m.W. eine offene Frage, ob es nichtkählersche Deformationen von P_n bzw. Q_n gibt.

Liste von Symbolen

Die folgenden Symbole haben, soweit im Text nichts anderes festgelegt ist, im allgemeinen die folgende Bedeutung:

C	Körper der komplexen Zahlen
C^*	multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen
$c_i(X)$	i-te Chernsche Klasse einer komplexen Mannigfaltigkeit X
$c_i(\xi)$	" " " eines holomorphen Vektorbündels ξ
$c(Z_r)$	duale Cohomologieklasse in $H^{2(n-r)}(X_n, Z)$ eines r-dimensionalen Zykels Z_r auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit X_n
δ^i_j	Kroneckersymbol
$GL(n,C)$	allgemeine lineare Gruppe über C
$GL(m,n,C)$	$\{(a_{ij}) \in GL(n+m,C)$ mit: $a_{ij}=0$, falls $i>m$; $j\leq m\}$
$\mathcal{O}_X$	Strukturgarbe, d.h. Garbe der Keime holomorpher Funktionen auf X
$\mathcal{O}(\xi)$	Garbe der Keime holomorpher Schnitte in ξ
P_n	n-dimensionaler komplexer projektiver Raum
$PGL(n,C)$	Gruppe der Kollineationen von P_n
$\pi_1(G)$	Fundamentalgruppe von G
$\pi^*_q(\mathcal{G})$	q-te Bildgarbe von $\mathcal{G}$ bzgl. π
Q_m	m-dimensionale singularitätenfreie komplexe projektive Quadrik
R	Körper der reellen Zahlen
Θ	Garbe der Keime holomorpher kontravarianter Vektorfelder auf einer komplexen Mannigfaltigkeit
Z	Gruppe der ganzen Zahlen
Z_2	Gruppe der ganzen Zahlen modulo 2